Nous sommes maintenant prêts à parler de topologies sur ces espaces, ie de convergence, de continuité etc...
Cela passe par la def des boules qui jouent le rôle que les intervalles jouaient dans $\mathbb{R}$.

§ 4. Topologie des espaces métriques

Def Soit (E,d) un espace métrique. Etant donné $x \in E$ et $r > 0$ on définit

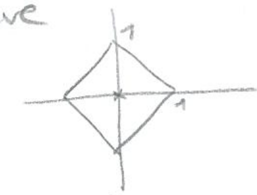
- la boule ouverte de centre x et de rayon r :
$$B(x,r) = \{y \in E,\ d(x,y) < r\}$$
- la boule fermée
$$\overline{B}(x,r) = \{y \in E,\ d(x,y) \leq r\}$$
- la sphère
$$S(x,r) = \{y \in E,\ d(x,y) = r\}$$

Rq
- si on veut préciser la distance en question, on notera B_d, $\overline{B}_d$, S_d
- $\overline{B} = B \amalg S$ (union disjointe)
- $B \subset \overline{B} \subset B(x,r')$ $\forall r' > r$
- $\operatorname{diam}(B(x,r)) \leq 2r$ par inégalité triangulaire (idem pr $\overline{B}, S$)
  $\hookrightarrow$ tte boule est bornée
- inversement, tout ensemble borné est inclus dans une boule dont on peut choisir le centre arbitrairement

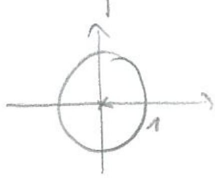
Exo

Ex Considérons les boules pour les $\neq$ normes (et de distances) sur $\mathbb{R}^2$. En prenant $x = 0$ et $r = 1$ on trouve

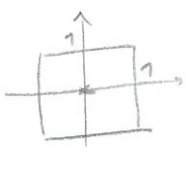
$$B_{\|\,\|_1} = \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 / |x_1| + |x_2| < 1\}$$



$$B_{\|\,\|_2} = \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 / \sqrt{x_1^2 + x_2^2} < 1\}$$



$$B_{\|\,\|_\infty} = \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 / |x_1| < 1 \text{ et } |x_2| < 1\}$$



On rq que $B_1 \subset B_2 \subset B_\infty$
Pouvait on s'y attendre ?

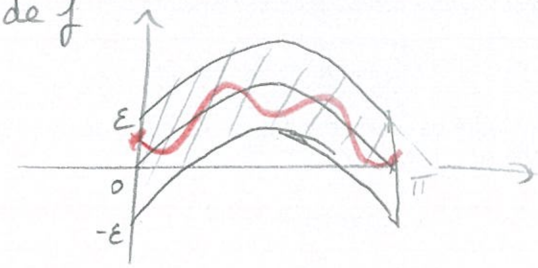
Exo

On rq aussi que ces ens sont convexes cf ci après

Exemple 2 $E = C([0,\pi], \mathbb{R})$, $d = d_\infty$, $f = \sin$

$$B(f,\varepsilon) = \{ g \in E \,/\, \sin x - \varepsilon \le g(x) \le \sin x + \varepsilon \quad \forall x \in [0,\pi] \}$$

Ens. des fcts dont le graphe est inclus dans un "tube" de "rayon" autour de celui de f



Exos • Dans $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, boules ouv = int ouverts bornés
fermées = segments

• union finie d'ens. bornés est bornée

• estimer $\mathrm{dist}(B(x,r), B(\tilde{x},\tilde{r}))$

Def la + importante du chapitre

Def Soit (E,d) un espace métrique. Un sous-ensemble $A \subset E$ est dit <u>ouvert (dans E)</u> si pour tout $x \in A$, $\exists\, r>0$ tq $B(x,r) \subset A$. On dit que A est <u>fermé</u> si son complémentaire dans E, ${}^cA = E \setminus A$, est ouvert

Remarques

- par def, E et $\emptyset$ sont ouverts dans E, donc aussi fermés
- Si E est muni de la distance discrète d alors tous les sous-ens de E sont ouverts et fermés !
- ⚠ Il faut toujours préciser "ouvert (resp. fermé) de <u>quoi</u>"
  En effet, considérons $(\mathbb{R}, d_{|\cdot|})$. $[0,1[$ n'est ni fermé ni ouvert dans $(\mathbb{R}, d_{|\cdot|})$, mais il est les deux dans $([0,1[$, distance induite$)$!
  Plus généralement, on verra que si (E,d) est un espace métrique et $A \subset E$, $B \subset A$ est un ouvert (resp fermé) de (A, d_{induite})
  $\Updownarrow$
  B est l'intersection avec A d'un ouvert (resp. fermé) de (E,d)

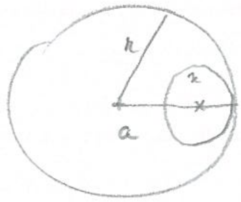
Def <u>voisinage</u> Dans un e.m. (E,d) on dit qu'un sous-ensemble $V \subset E$ est <u>un voisinage de $a \in E$</u> s'il existe $\varepsilon > 0$ t.q $B(a,\varepsilon) \subset V$

Ainsi un sous-ens. A de E est ouvert si et seulement si il est un voisinage de chacun de ses points.

Proposition Dans un espace métrique,
(i) les boules ouvertes sont des ouverts.
(ii) ——— fermées ——— fermés.

Ça a l'air idiot mais c'est juste parce que la terminologie est cohérente

Dém. (i)



Soit $B(a,r)$ une boule ouverte de (E,d) et $x \in B(a,r)$. Alors $r - d(x,a) > 0$ et la boule ouverte $B(x, r-d(x,a))$ est incluse dans $B(a,r)$. En effet, pour tout y dans cette boule,

$$d(y,a) \leq d(y,x) + d(x,a) < r - d(x,a) + d(x,a) = r \text{, donc } y \in B(a,r)$$

Ainsi $B(a,r)$ est un ouvert de (E,d). □

(ii) Il s'agit de montrer que $\left(\overline{B}(a,r)\right)^c$ est ouvert, pour tout $a \in E$, $r > 0$
Soit x un élément de cet ensemble. Alors $d(x,a) - r > 0$.
Si $y \in B(x, d(x,a) - r)$,

$$d(a,y) \underset{\text{inégalité triangulaire}}{\geq} d(a,x) - d(x,y) > r \text{ donc } y \in \left(\overline{B}(a,r)\right)^c$$

Donc $B(x, d(x,a) - r) \subset \left(\overline{B}(a,r)\right)^c$. Cet ensemble est donc ouvert. □

Exo

Exercice Vérifier que toute sphère est un fermé.

Conséquence :

Déf topologique de voisinage : Un sous-ensemble $V \subset E$ est un voisinage de $a \in E$ ssi V contient un ouvert contenant a.

Cette déf ne fait plus intervenir (explicitement) de distance. C'est cette définition qu'on prendra en topologie générale où au lieu de se donner une distance on se donnera un ensemble de parties de E qu'on appellera les ouverts.

Proposition Dans un espace métrique
(i) toute réunion (quelconque) d'ouverts est un ouvert.
(ii) toute intersection finie d'ouverts est un ouvert

(faux pour intersection infinie en général. Ex : $\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*}]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}[= \{0\}$

On dit que les ouverts d'un espace métrique (E,d) (définis à partir de la distance) forment une topologie sur E : (II.17)

Def Une topologie sur un ensemble E est la donnée d'une partie $\mathcal{O} \subset \mathcal{P}(E)$ stable par union (quelconque) et par intersection finie. Les éléments de $\mathcal{O}$ sont appelés les ouverts de la topologie

En topologie générale, une topologie $\mathcal{O}$ sur E sera la donnée initiale, (plutôt qu'une distance) et toutes les notions (voisinage, convergence, continuité) seront définies à partir de cette donnée. C'est pourquoi dans tout ce qui suit nous allons nous appliquer, lorsque c'est possible, à reformuler les définitions en termes d'ouverts plutôt qu'en termes de distance.

Preuve de la proposition

(i) Supposons que $A = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma$ où Γ est un ensemble qcq d'indices et les A_γ sont des ouverts de E. Si $a \in A$, $a \in A_\gamma$ pour un certain γ, et A_γ est ouvert donc il existe $r>0$ t.q $B(a,r) \subset A_\gamma$. Mais $A_\gamma \subset A$ donc $B(a,r) \subset A$. A est donc ouvert. □

(ii) Supposons à présent que $A = A_1 \cap \ldots \cap A_n$ où $n \in \mathbb{N}^*$ (pour $n=0$ on obtient E tout entier) et A_i est ouvert $\forall i$. Alors si $a \in A$, $a \in A_i$ $\forall i$ donc $\exists r_1 \ldots r_n$ tq $B(a,r_i) \subset A_i$ $\forall i$. Mais alors $B(a, \underbrace{\min_i r_i}_{>0}) \subset A_j$ $\forall j$ donc $\subset A = \bigcap_j A_j$. Donc A est ouvert. □

(est bien défini car nb fini)

Conséquence Une réunion (qcq) de boules ouvertes est un ouvert. Et réciproquement, tout ouvert A de (E,d) est une réunion de boules ouvertes. En effet, $\forall x \in A$, $\exists r_x > 0$ tq $B(x,r_x) \subset A$, et on a alors $A = \bigcup_{x \in A} B(x,r_x)$. L'inclusion $\supset$ vient de la déf des r_x, et l'inclusion $\subset$ est immédiate puisque $\forall x \in A$, $x \in B(x,r_x)$. Ainsi, dans un espace métrique, les ouverts sont les réunions de boules ouvertes.

Rq En passant au complémentaire et en utilisant : $\left(\bigcup_i A_i\right)^c = \bigcap_i (A_i^c)$ et $\left(\bigcap_i A_i\right)^c = \bigcup_i A_i^c$

On obtient :

- toute intersection d'ensembles fermés est un fermé
- toute union finie d'ensembles fermés est un fermé

Retour sur la topologie induite

Proposition : Si (E,d) est un espace métrique, $A \subset E$ et d_A désigne la distance induite par d sur A, les ouverts (resp fermés) de (A, d_A) sont les intersections avec A d'ouverts (resp. fermés) de (E,d)

Preuve (i) Ouverts : Observation Les boules ouvertes de (A, d_A) sont des intersections de boules ouvertes de (E,d) avec A :

Si $a \in A$, $r > 0$

$$B_{(A,d_A)}(a,r) = \{x \in A,\ d_A(x,a) < r\} = \{x \in E,\ d(x,a) < r\} \cap A.$$
$$= B_{(E,d)}(a,r) \cap A$$

Soit donc U un ouvert de (A, d_A) et $r : U \to \mathbb{R}_+^*$ tq $U = \bigcup_{x \in U} B_A(x, r(x))$

Alors $U = \underbrace{\left(\bigcup_{x \in A} B_E(x, r(x)) \right)}_{\text{ouvert de } E} \cap A$

Ainsi tout ouvert de (A, d_A) est l'intersection d'un ouvert de (E, d_E) avec A.

Réciproquement. Soit $\tilde{U}$ un ouvert de E : $\tilde{U} = \bigcup_{x \in \tilde{U}} B_E(x, r(x))$

Alors $$\tilde{U} \cap A = \bigcup_{x \in \tilde{U}} \left(B_E(x, r(x)) \cap A \right)$$
$$= \bigcup_{x \in \tilde{U} \cap A} \left(B_E(x, r(x)) \cap A \right)$$
$$= \bigcup_{x \in \tilde{U} \cap A} B_A(x, r(x))$$ ouvert de (A, d_A) car réunion de boules ouvertes □

(ii) fermés Soit $F \subset A$

F fermé de (A, d_A) $\iff$ $A \setminus F$ ouvert de (A, d_A)

$\iff$ $\exists\, \tilde{U}$ ouvert de (E,d) tq $A \setminus F = \tilde{U} \cap A$

$\iff$ $\exists\, \tilde{F}$ fermé de (E,d) tq $A \setminus F = (E \setminus \tilde{F}) \cap A$

$\iff$ ______________ $F = A \setminus [(E \setminus \tilde{F}) \cap A]$

$\iff$ ______________ $F = A \cap \tilde{F}$. □