

Nous sommes maintenant prêts à parler de topologies sur ces espaces, ie de convergence, de continuité etc...
Cela fera la def des boules qui jouent le rôle que les intervalles jouent dans \mathbb{R} .

§ 4. Topologie des espaces métriques

Def Soit (E, d) un espace métrique. Etant donné $x \in E$ et $r > 0$ on définit

- la boule ouverte de centre x et de rayon r :

$$B(x, r) = \{y \in E, d(x, y) < r\}$$

- la boule fermée

$$\bar{B}(x, r) = \{y \in E, d(x, y) \leq r\}$$

- la sphère

$$S(x, r) = \{y \in E, d(x, y) = r\}$$

Rq si on veut préciser la distance en question, on notera B_d, \bar{B}_d, S_d

- $\bar{B} = B \cup S$ (union disjointe)

- $B \subset \bar{B} \subset B(x, r')$ $\forall r' > r$

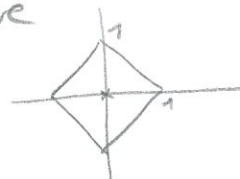
- diam $(B(x, r)) \leq 2r$ par inégalité triangulaire (idem p \bar{B}, S)
↳ la boule est bornée

- inversement, tout ensemble borné est inclus dans une boule dont on peut choisir le centre arbitrairement

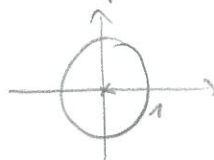
(Lms)

Ex Considérons les boules pour les \neq normes (et de distances) sur \mathbb{R}^2 . En prenant $x=0$ et $r=1$ on trouve

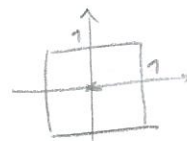
$$B_{\|\cdot\|_1} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 / |x_1| + |x_2| < 1\}$$



$$B_{\|\cdot\|_2} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 / \sqrt{x_1^2 + x_2^2} < 1\}$$



$$B_{\|\cdot\|_\infty} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 / |x_1| < 1 \text{ et } |x_2| < 1\}$$



On tq que $B_1 \subset B_2 \subset B_\infty$
Peurait-on s'y attendre?

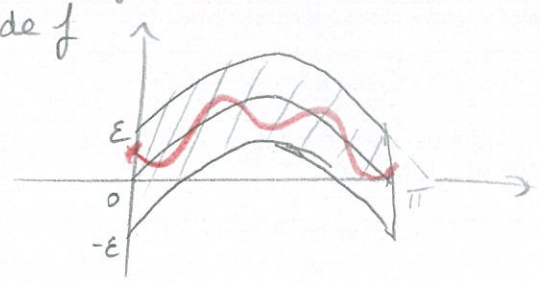
(Lms)

On tq aussi que ces en. sont convexes cf ci après

Exemple 2 $E = C([0, \pi], \mathbb{R})$, $d = d_{\infty}$, $f = \sin$

$$B(f, \epsilon) = \left\{ g \in E \mid \sin x - \epsilon \leq g(x) \leq \sin x + \epsilon \quad \forall x \in [0, \pi] \right\}$$

ens. des fct dont le graphe est inclus dans un "tube" de "rayon" ϵ autour de celui de f



Exos. dans $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, boules ouvertes = int ouverts bornés
fermées = segments

- union finie d'ens. bornés et bornée
- critère dist $(B(x, r), B(x', r'))$

Def la + importante du chapitre

Def Soit (E, d) un espace métrique. Un sous-ensemble $A \subseteq E$ est dit ouvert (dans E) si pour tout $x \in A$, $\exists r > 0$ tq $B(x, r) \subset A$. On dit que A est fermé si son complémentaire dans E , $A^c = E \setminus A$, est ouvert

Remarques

- par def, E et \emptyset sont ouverts dans E , donc aussi fermés
- si E est muni de la distance usuelle d alors tous les sous-ens de E sont ouverts et fermés!
- Δ Il faut toujours préciser "ouvert (resp. fermé) de quoi"
En effet, considérons $(\mathbb{R}, d_{1,1})$. $[0, 1[$ n'est ni fermé ni ouvert dans $(\mathbb{R}, d_{1,1})$, mais il est les deux dans $([0, 1[, \text{distance induite})$!
Plus généralement, on veut que si (E, d) est un espace métrique et $A \subseteq E$, $B \subset A$ est un ouvert (resp. fermé) de (A, d_{induite})
 \iff
 B est l'intersection avec A d'un ouvert (resp. fermé) de (E, d)

Def métrique de voisinage. Dans un e.m. (E, d) on dit qu'un sous-ensemble $V \subseteq E$ est un voisinage de $a \in E$ s'il existe $\epsilon > 0$ tq $B(a, \epsilon) \subset V$

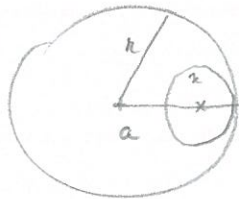
Ainsi un sous-ens. A de E est ouvert si et seulement si il est un voisinage de chacun de ses points.

(II.16)

Proposition Dans un espace métrique,
 (i) les boules ouvertes sont des ouverts.
 (ii) ————— fermées ————— fermées.

Ça a l'air idiot mais c'est juste parce que la terminologie est cohérente

Dém. (i)



Soit $B(a, r)$ une boule ouverte de (E, d) et $x \in B(a, r)$. Alors $r - d(x, a) > 0$ et la boule ouverte $B(x, r - d(x, a))$ est incluse dans $B(a, r)$. En effet, pour tout y dans cette boule,

$d(y, a) \leq d(y, x) + d(x, a) < r - d(x, a) + d(x, a) = r$, donc $y \in B(a, r)$. Ainsi $B(a, r)$ est un ouvert de (E, d) . \square

(ii) Il s'agit de montrer que $(\overline{B(a, r)})^c$ est ouvert, pour tout $a \in E, r > 0$.
 Soit x un élément de cet ensemble. Alors $d(x, a) - r > 0$.

Si $y \in B(x, d(x, a) - r)$,

$$d(a, y) \geq d(a, x) - d(x, y) > r \text{ donc } y \in (\overline{B(a, r)})^c.$$

inégalité
triangulaire

Donc $B(x, d(x, a) - r) \subset (\overline{B(a, r)})^c$. Cet ensemble est donc ouvert. \square

(Exo)

Exercice Vérifier que toute sphère est un fermé.

Conséquence :

Def topologique de voisinage : Un sous-ensemble V de E est un voisinage de $a \in E$ ssi V contient un ouvert contenant a .

Cette def me fait penser davantage (explicitement) de distance. C'est cette définition qu'on prendra en topologie générale où au lieu de se donner une distance on se donnera un ensemble de parties de E qu'on appellera les ouverts.

Proposition Dans un espace métrique
 (i) toute réunion (quelconque) d'ouverts est un ouvert.
 (ii) toute intersection finie d'ouverts est un ouvert

(faux pour intersection infinie en général. Ex: $\bigcap_{n \in \mathbb{N}}]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}[= \{0\}$)

On dit que les ouverts d'un espace métrique (E, d) (défini à partir de la distance) forment une topologie sur E .

II.17

Def Une topologie sur un ensemble E est la donnée d'une partie $\mathcal{O} \subset \mathcal{P}(E)$ stable par union (quelconque) et par intersection finie. Les éléments de \mathcal{O} sont appelés les ouverts de la topologie.

En topologie générale, une topologie \mathcal{O} sur E a la donnée initiale (plutôt qu'une distance) et toutes les notions (voisinage, convergence, continuité) seront définies à partir de cette donnée. C'est pourquoi dans tout ce que suit nous allons nous appuyer, lorsque c'est possible, à reformuler les définitions en termes d'ouverts plutôt qu'en termes de distance.

Preuve de la proposition

(i) Supposons que $A = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma$ où Γ est un ensemble qq d'indices et les A_γ sont des ouverts de E . Si $a \in A$, $a \in A_\gamma$ pour un certain γ , et A_γ est ouvert donc il existe $\eta > 0$ tq $B(a, \eta) \subset A_\gamma$. Mais $A_\gamma \subset A$ donc $B(a, \eta) \subset A$. A est donc ouvert. \square

(ii) Supposons à présent que $A = A_1 \cap \dots \cap A_n$ où $n \in \mathbb{N}^*$ (pour $n=0$ on obtient E entier) et A_i est ouvert $\forall i$. Alors si $a \in A$, $a \in A_i \forall i$ donc $\exists r_1, \dots, r_n$ tq $B(a, r_i) \subset A_i \forall i$. Mais alors $B(a, \min_i r_i) \subset A_i \forall i$ donc $\subset A = \bigcap A_i$. Donc A est ouvert. \square

(et bien défini car infini)

Conséquence Une réunion (qq) de boules ouvertes est un ouvert.

Et réciproquement, tout ouvert A de (E, d) est une réunion de boules ouvertes. En effet, $\forall x \in A$, $\exists r_x > 0$ tq $B(x, r_x) \subset A$, et on a alors $A = \bigcup_{x \in A} B(x, r_x)$. L'inclusion \supset vient de la def des r_x , et l'inclusion \subset est immédiate puisque $\forall x \in A$, $x \in B(x, r_x)$. Ainsi, dans un espace métrique, les ouverts sont les réunions de boules ouvertes.

Rq En passant au complémentaire et en utilisant : $(\bigcup_i A_i)^c = \bigcap_i (A_i)^c$ et $(\bigcap_i A_i)^c = \bigcup_i (A_i)^c$

On obtient :

- toute intersection d'ensembles fermés est un fermé
- toute union finie d'ensembles fermés est un fermé

Proposition: Si (E, d) est un espace métrique, $A \subseteq E$ et d_A désigne la distance induite par d sur A , les ouverts (resp. fermés) de (A, d_A) sont les intersections avec A d'ouverts (resp. fermés) de (E, d)

Preuve (i) Ouverts: Observation Les boules ouvertes de (A, d_A) sont des intersections de boules ouvertes de (E, d) avec A :

$$\begin{aligned} \forall a \in A, \forall r > 0 \quad B_{(A, d_A)}(a, r) &= \{x \in A, d_A(x, a) < r\} = \{x \in E, d(x, a) < r\} \cap A \\ &= B_{(E, d)}(a, r) \cap A \end{aligned}$$

Soit $U \subseteq A$ un ouvert de (A, d_A) et $\eta: U \rightarrow \mathbb{R}^*_+$ tq $U = \bigcup_{x \in U} B_A(x, \eta(x))$

$$\text{Alors } U = \left(\bigcup_{x \in A} B_E(x, \eta(x)) \right) \cap A$$

ouvert de E

Ainsi tout ouvert de (A, d_A) est l'intersection d'un ouvert de (E, d) avec A .

Réciproquement: Soit \tilde{U} un ouvert de E : $\tilde{U} = \bigcup_{x \in \tilde{U}} B_E(x, \eta(x))$

$$\begin{aligned} \text{Alors } \tilde{U} \cap A &= \bigcup_{x \in \tilde{U}} (B_E(x, \eta(x)) \cap A) \\ &= \bigcup_{x \in \tilde{U} \cap A} (B_E(x, \eta(x)) \cap A) \\ &= \bigcup_{x \in \tilde{U} \cap A} B_A(x, \eta(x)) \quad \text{ouvert de } (A, d_A) \text{ car réunion de boules ouvertes} \quad \square \end{aligned}$$

(ii) fermé soit $F \subseteq A$

$$\begin{aligned} F \text{ fermé de } (A, d_A) &\Leftrightarrow A \setminus F \text{ ouvert de } (A, d_A) \\ &\Leftrightarrow \exists \tilde{U} \text{ ouvert de } (E, d) \text{ tq } A \setminus F = \tilde{U} \cap A \\ &\Leftrightarrow \exists \tilde{F} \text{ fermé de } (E, d) \text{ tq } A \setminus F = (E \setminus \tilde{F}) \cap A \\ &\Leftrightarrow \text{-----} \quad F = A \setminus [(E \setminus \tilde{F}) \cap A] \\ &\Leftrightarrow \text{-----} \quad F = A \cap \tilde{F} \quad \square \end{aligned}$$

Nous sommes maintenant prêts, après cette mise en place de vocabulaire, comme dans \mathbb{R} , à nous intéresser aux notions de convergence, notamment de suites

§ 5 Convergence des suites

Dans \mathbb{R} ce $\xi, (\epsilon, d)$ désigne un espace métrique.

Def suite dans E : comme dans \mathbb{R} , en remplaçant \mathbb{R} par E !
sous-suite

Def Soit (x_n) une suite dans E et $a \in E$. On dit que (x_n) converge vers a lorsque $\lim_{n \rightarrow +\infty} d(x_n, a) = 0$ i.e. :
 suite réelle!

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, d(x_n, a) < \epsilon$$

Autrement dit $\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, x_n \in B(a, \epsilon)$ (*)

et ceci équivaut à (def topologique) \forall voisin V de $a, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, x_n \in V$ (**)

(On a clairement $(**) \Rightarrow (*)$ puisque les boules ouvertes sont des voisin de a et comme V voisin contient une boule ouverte, on a aussi $(*) \Rightarrow (**)$)

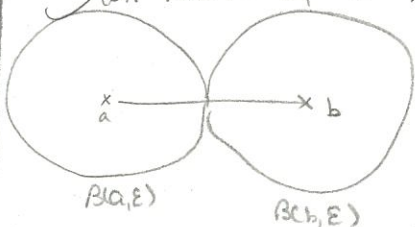
topo. gén.

Rq cette dernière def ne fait plus intervenir la distance (ou de façon cachée) mais seulement la notion de voisinage. Elle sera donc directement transposable pour les espaces topologiques généraux où on n'a pas de distance!

Proposition: Si la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ cv de E vers $a \in E$ alors la limite a est unique et l'on note $a = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$.

Rq Notons bien que la démonstration utilisera la distance et pas seulement la def abstraite de cv. Cette proposition sera fautive en général. C'est faux, non?

Dem Soit $b \in E$ tq $b \neq a$. Alors $d(a, b) > 0$. Notons $\epsilon = \frac{d(a, b)}{2}$. Soit $N \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq N, d(x_n, a) < \epsilon$ comme $B(a, \epsilon) \cap B(b, \epsilon) = \emptyset$, $\forall m \geq N, x_n \notin B(b, \epsilon)$. A fortiori (x_n) ne



cv vers b !
 Or pas vers b ! \square

inégalité Δ

Rg la preuve repose sur le fait que deux points distincts d'un espace métrique possèdent des voisinages disjoints. Un $\text{II} \cdot 20$ espace topologique qui a cette propriété sera dit séparé.

topogén.

Les espaces métriques sont des espaces topologiques séparés mais il existe des espaces topologiques qui ne le sont pas, et ce ne sont pas just des contre-exemples "exotiques". En général, l'espace des trajectoires d'un champ de vecteurs n'est pas séparé, et c'est un espace qui il est naturel d'étudier !.

D'autres résultats sur \mathbb{R} se généralisent :

Exo

exercice • Une suite convergente est bornée (Δ à la def de "borné" pour un espace métrique général)

• toute sous-suite d'une suite convergente CV vers la même limite

Def On dit que $a \in E$ est une valeur d'adhérence de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ si : $\forall \varepsilon > 0, \{n \in \mathbb{N} \mid d(x_n, a) < \varepsilon\} = \{n \in \mathbb{N} \mid x_n \in B(a, \varepsilon)\}$ est infini

De façon équivalente :

a est une v.a. de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ si \forall voisinage V de $a, \#\{n \in \mathbb{N}, x_n \in V\} = +\infty$
(def topologique)

Exo

Prop a est une v.a. de $(x_n)_n$ ssi il existe une ss. suite de $(x_n)_n$ qui CV vers a

Δ Ceci n'est pas vrai en général. On ne peut pas le démontrer sans utiliser la distance. Ce sera vrai dans les espaces à bases dénombrables de voisinages.

Enfin, on verra dans le paragraphe suivant que :

Prop L'ensemble des valeurs d'adhérence d'une suite est fermé

Comme dans \mathbb{R} , il y a une autre notion def de convergence : au sens de Cauchy.