Là on considérait un cas particulier d'espaces métriques, les EVN, et on va restreindre encore en considérant un cas particulier d'EVN, les espaces préhilbertiens.

§ 3 Espaces préhilbertiens

Dans ce §, E est un $\mathbb{K}$ ev ac $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Déf On appelle produit scalaire sur E une application

$$\langle\,,\rangle : E \times E \to \mathbb{K}$$
$$(x,y) \mapsto \langle x,y\rangle$$

possédant les propriétés suivantes :

a) $\langle x,x\rangle \geq 0 \quad \forall x \in E$ et $\langle x,x\rangle = 0$ ssi $x = 0$ (positivité)

b) $\langle x,y\rangle = \overline{\langle y,x\rangle} \quad \forall x,y \in E$ (symétrie)

c) $\langle \lambda x + y, z\rangle = \lambda\langle x,z\rangle + \langle y,z\rangle \quad \forall x,y,z \in E,\ \lambda \in \mathbb{K}$ (linéarité à gauche)

Rq Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, un produit scalaire est dc une forme bilinéaire symétrique définie positive sur E (oublier la conj ds b)

Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, un produit scalaire est une forme sesquilinéaire hermitienne définie positive.

(sesqui-linéaire : lin % à un arg^t, antilin % à l'autre
3/2
hermitienne : b) ac conjugaison complexe)

La dénomination "espace préhilbertien" n'est pas très parlante. On verra au chap. 4 que les espaces de Hilbert sont des espaces préhilbertiens qui ont en outre la propriété de complétude (suites de Cauchy etc)

préhilbertien de dim finie =: espace euclidien

en anglais : unitary space

Exemples

- produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$: $\langle x,y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \quad \forall x,y \in \mathbb{R}^n$

- produit scalaire canonique sur $\mathbb{C}^n$: $\langle x,y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i}$

- $E = C(I, \mathbb{K})$: $\langle f,g\rangle = \int_I f(x)\overline{g(x)}\,dx$

Notation Etant donné un espace préhilbertien $(E, \langle , \rangle)$, on note $\|x\| = \sqrt{\langle x,x\rangle}$

C'est une norme.

Preuve
- positivité et séparation sont évidentes
- homogénéité découle de la linéarité de $\langle , \rangle$
- inégalité triangulaire :

Prop (Inégalité de Cauchy-Schwarz)

$\forall x,y \in E \quad |\langle x,y\rangle| \leq \|x\|.\|y\|$
En outre, on a égalité ssi x,y sont linéairement dépendants

Preuve Si $\langle x,y\rangle = 0$, la conclusion est vraie
Si $\langle x,y\rangle \neq 0$ (en particulier $x,y \neq 0$), par linéarité, il suffit de considérer le cas $\|x\| = \|y\| = 1$

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \text{ on a } \quad 0 \leq \|x+\lambda y\|^2 = \langle x+\lambda y \mid x+\lambda y\rangle$$
$$= \|x\|^2 + \lambda\langle y,x\rangle + \bar{\lambda}\langle x,y\rangle + |\lambda|^2\|y\|^2$$
$$= 1 + 2\,\mathrm{Re}(\bar{\lambda}\langle x,y\rangle) + |\lambda|^2$$

pour $\lambda = -\langle x,y\rangle$, on obtient $\quad = 1 - 2|\langle x,y\rangle|^2 + |\langle x,y\rangle|^2 \geq 0$

i.e $|\langle x,y\rangle|^2 \leq 1$, ce qu'on voulait □

(en cas d'égalité on a $x+\lambda y = 0$ dc colinéarité)

Corollaire (Inégalité de Minkowski)

$\forall x,y \in E \quad \|x+y\| \leq \|x\|+\|y\|$, ac égalité ssi x et y sont positivement colinéaires

<u>Preuve</u> $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \langle y,x\rangle + \langle x,y\rangle + \|y\|^2$

$$= \|x\|^2 + 2\,\mathrm{Re}\langle x,y\rangle + \|y\|^2$$

$$\leq \|x\|^2 + 2|\langle x,y\rangle| + \|y\|^2$$

$$\underset{CS}{\leq} \|x\|^2 + 2\|x\|\cdot\|y\| + \|y\|^2$$

$$= (\|x\| + \|y\|)^2$$

cas égalité ssi égalité dans les deux inégalités, soit $|\langle x,y\rangle| = \|x\|\|y\|$ → colinéarité et $\mathrm{Re}\langle x,y\rangle = |\langle x,y\rangle|$ → rapport de colinéarité réel positif. □

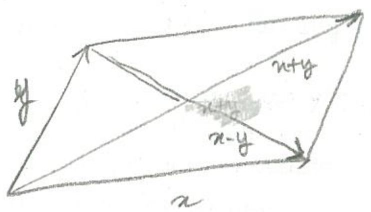
<u>Proposition</u> Soit $(E, \langle,\rangle)$ un espace préhilbertien et $\|.\|$ la norme associée.

a) $\forall x,y \in E$ tq $\langle x,y\rangle = 0$, on a $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$ (Pythagore)

b) $\forall x,y \in E$, on a

$$2(\|x\|^2 + \|y\|^2) = \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2$$ (identité du parallélogramme)

<u>Preuve</u> il suffit de remarquer que $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\,\mathrm{Re}\langle x,y\rangle$



<u>Proposition</u> (identité de polarisation)

a) si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $\forall x,y \in E$, $\langle x,y\rangle = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right)$

b) si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $\forall x,y \in E$, $\langle x,y\rangle = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2\right)$

Exo <u>Dem</u> Calcul direct

L'intérêt est d'exprimer le produit scalaire en terme de la norme.

<u>Appl</u> Si $(E, \|\,\|)$ est un evn, on peut <u>définir</u> $\langle,\rangle$ par l'identité de polarisation. On vérifie alors que $\langle,\rangle$ est un produit scalaire ssi $\|\,\|$ satisfait l'identité du ▱. Cette identité caractérise donc les normes associées à des produits scalaires.