Celle-ci n'est difficile que pour $1<p,q<\infty$, on peut la démontrer en suivant point par pt la preuve ds $\mathbb{K}^n$ (remplacer Σ par $\int$) ou en approchant les $\int$ par des Σ de Riemann.

II.6

La preuve de $\|f\|_p \to \|f\|_\infty$ diffère notablement du cas discret car les normes ne sont plus équivalentes (voir ci-après)

On suppose $f \neq 0$ sans quoi il n'y a rien à démontrer

i) $\int_I |f|^p \leq \|f\|_\infty^p |I| \Rightarrow \|f\|_p \leq |I|^{1/p} \|f\|_\infty$ (où $|I| = b-a>0$)

donc $\limsup_{p\to+\infty} \|f\|_p \leq \|f\|_\infty$ ($\times \limsup |I|^{1/p} = 1$)

ii) Etant donné $\varepsilon \in]0,1[$, il existe un intervalle $J \subset I$ d'intérieur non nul tq $|f(x)| \geq (1-\varepsilon)\|f\|_\infty$ $\forall x \in J$ (sup atteint + continuité au voisinage de ce pt)

Alors $\int_I |f|^p \geq \int_J |f|^p \geq \|f\|_\infty^p (1-\varepsilon)^p |J|$

donc $\|f\|_p \geq \|f\|_\infty (1-\varepsilon) |J|^{1/p}$ Ainsi $\liminf_{p\to+\infty} \|f\|_p \geq (1-\varepsilon)\|f\|_\infty$

Ceci étant vrai pour $\forall \varepsilon$, $\liminf_{p\to+\infty} \|f\|_p \geq \|f\|_\infty$, ce qui conclut □

Rq Contrairement à la dim finie, On n'a pas équivalence des normes L^p :

On a $\forall f$, si $p \leq q$, $\|f\|_p \leq \|f\|_q |I|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}$ (par Hölder, comme avant)

mais la preuve de l'autre inégalité ne marche pas et de fait

Exo

si $p<q$, on peut trouver une suite (f_n) tq $\|f_n\|_p < 1$ $\forall n$ et $\|f_n\|_q \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$

Encore + général (là on avait des fonctions de I (segment) ds $\mathbb{R}$. considérons les fonctions de X (qcq) dans un evn E qui sont bornées

ie que $\{\|f(x)\|, x \in X\} \subset \mathbb{R}_+$ est borné.

Elles forment un EVN, noté $B(X,E)$, que l'on peut munir (comme $C(I,\mathbb{R})$) de la norme uniforme $\|f\|_\infty = \sup_{x\in X} \|f(x)\|_E$

Aff $(B(X,E), \| \|_\infty)$ est un EVN.

On verra que ses propriétés dépendent de celles de X.