§2 Espaces vectorels normés

Espaces particuliers munis d'une distance particulière et où il sera notamment intéressant de considérer les applications continues linéaires.

Rappels $\boxed{\text{def d'ev}}$ Soit $\mathbb{K}$ un corps. On appelle ev sur $\mathbb{K}$ un ens E muni d'une opérat° $+$ et d'une action $\cdot$ de $\mathbb{K}$ sur E tq :

a) $(E,+)$ est un groupe ab. (d'élt neutre noté 0_E)

b) $\forall \lambda,\mu \in \mathbb{K}$, $\forall x,y \in E$, on a :

$$\left.\begin{array}{l} 1.x = x \\ (\lambda\mu).x = \lambda.(\mu.x) \end{array}\right) \text{action} \quad (\cdot : \mathbb{K}\times E \to E)$$

$$\left.\begin{array}{l} (\lambda+\mu).x = \lambda.x+\mu.x \\ \lambda(x+y) = \lambda.x + \lambda.y \end{array}\right) \text{compatibilité.}$$

Les élts de E sont appelés "vecteurs", ceux de $\mathbb{K}$ "scalaires"

Ex 1) $\mathbb{K}$ lui-même

2) $E = \underbrace{\mathbb{K}\times\dots\times\mathbb{K}}_{n \text{ fois}} = \mathbb{K}^n$ où $n\in\mathbb{N}^*$ avec $+$ et $.$ déf de façon évidente

3) $\mathbb{K}^X$ où X ensemble qcq (espace de fonctions)

4) $E = \{0\}$

Dans la suite on suppose $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

$\boxed{\text{Def (norme)}}$ Une norme sur un $\mathbb{K}$ev E est une application $\begin{array}{l} E \to \mathbb{R}_+ \\ x \mapsto \|x\| \end{array}$ tq

(i) (séparation) $\|x\|=0 \Rightarrow x=0$

(ii) (homogénéité) $\|\lambda.x\| = |\lambda|.\|x\|$ $\forall(\lambda,x)\in\mathbb{K}\times E$

(iii) (inég Δ) $\|x+y\| \leq \|x\|+\|y\|$ $\forall(x,y)\in E^2$

On dit que $(E,\|.\|)$ est un ev normé

C'est bien sûr le cas des normes que vous connaissez bien (euclidiennes) cf ci-après

Rq (i) et (iii) impliquent $\|x\|\geq 0$ ac égalité ssi $x=0$.

ex $|.|$ sur $\mathbb{R}$

Prop (norme $\to$ distance) Si $(E, \|\cdot\|)$ est un evn et si d est def par II.6

$$d : E \times E \to \mathbb{R}_+$$
$$(x,y) \mapsto \|x-y\|$$

alors d est une distance, dc

(Lxoo) (E,d) est un espace métrique

Mais toute distance n'est pas induite par une norme. Celles-ci ont des propriétés particulières :

- invariance par translation $\big(d(x+z, y+z) = d(x,y)\big)$
- "homogénéité" $\big(d(\lambda x, 0) = |\lambda| d(x,0)\big)$

(Lxoo) et en fait cela les caractérise.

Notamment si $E \neq \{0\}$ elles ne sont pas bornées, dc on a vu des dist. sur $\mathbb{R}$ qui n'étaient pas associées à des normes.

Maintenant on va étudier en profondeur 2 familles d'exemples.

A. Normes usuelles sur $\mathbb{K}^n$

Def Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $1 \leq p < +\infty$. $\forall x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ on note

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p}$$

Quant à $p = +\infty$: $\|x\|_\infty = \max_{i \in \{1..n\}} |x_i|$

Proposition : $\forall p \in [\![1, +\infty]\!]$, $\begin{array}{l} E \to \mathbb{R}_+ \\ x \mapsto \|x\|_p \end{array}$ est une norme sur $\mathbb{K}^n$.

En outre $\lim_{p \to +\infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty$.

Rq la + importante : $p = 2$, norme euclidienne, celle ac laquelle on définit la distance "physique". On rencontre aussi régulièrement $p=1$ et $p=+\infty$.

Dem . la séparation est évidente, ainsi que l'homogénéité.

. Pour l'inégalité Δ, on commence par les cas simples $p=1, +\infty$ puis on traitera $1<p<+\infty$ à l'aide de l'inégalité de Minkowski dans qqes instants

II.7

$\underline{p=1}$ $\|x+y\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i+y_i| \leq \sum_{i=1}^{n} (|x_i|+|y_i|)$ ($\leq \Delta$ dans $\mathbb{R}$)

$= \|x\|_1 + \|y\|_1$

$\underline{p=+\infty}$ $\|x+y\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} |x_i+y_i| \overset{\leq \Delta \text{ dans } \mathbb{R}}{\leq} \max_{1\leq i\leq n} (|x_i|+|y_i|) \overset{\text{détailler}}{\leq} \max_j |x_j| + \max_j |y_j|$

$= \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$

Si $1 \leq p < +\infty$, $\|x\|_\infty^p \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \leq n \cdot \|x\|_\infty^p$

donc $\|x\|_\infty \leq \|x\|_p \leq \underbrace{n^{1/p}}_{\xrightarrow[p\to+\infty]{} 1} \|x\|_\infty$ dc $\|x\|_p \xrightarrow[p\to+\infty]{} \|x\|_\infty$ □

modulo Minkowski

Rq le module sur $\mathbb{C}$ correspond à la norme eucl sur $\mathbb{R}^2$.

Rq. + généralement, si $(E_1, \|\|_1) \ldots (E_n, \|\|_p)$ sont des espaces vect. normés

$(E_1 \times \ldots \times E_n, \|\cdot\|)$ en est un pour $\|(x_1, \ldots, x_n)\| = \left(\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|_i^p\right)^{1/p}$

Preuve de l'inégalité Δ pr $\|\,\|_p$ ds $\mathbb{R}^n$

Etape 1 (Inégalité de Young) Soient $1 < p, q < \infty$ tq $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

Alors $\forall a, b \in \mathbb{R}_+$, $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$

Preuve opsq $a, b > 0$ (sinon évident)

Notons $\alpha = p \ln(a) = \ln(a^p)$, $\beta = q \ln(b)$

Alors $ab = e^{\frac{\alpha}{p}} e^{\frac{\beta}{q}} = \exp\left(\frac{\alpha}{p} + \frac{\beta}{q}\right) \leq \frac{1}{p} e^\alpha + \frac{1}{q} e^\beta = \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$ □

convexité de la fonction exponentielle

Etape 2 (Inégalité de Hölder) mêmes hyp.

Alors $\forall x, y \in \mathbb{K}^n$, on a : $\left|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right| \leq \underbrace{\left(\sum |x_i|^p\right)^{1/p}}_{\|x\|_p} \underbrace{\left(\sum |y_i|^q\right)^{1/q}}_{\|y\|_q}$

Rq : pour $p=2$, on reconnaît l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Sous la seconde forme, elle reste valable pour $p=1$, $q=\infty$

Dém opsq $x, y \neq 0$ (sinon évident)

Quitte à remplacer x par $\frac{x}{\|x\|_p}$ et y par $\frac{y}{\|y\|_q}$ (l'in. est vraie ssi elle l'est pour l'une ou l'autre des paires), opsq $\|x\|_p = 1$ et $\|y\|_q = 1$.

Dans ce cas, en appliquant Young, on trouve

$$\left|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i||y_i| \leq \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{p}|x_i|^p + \frac{1}{q}|y_i|^q\right) = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \; ! \quad \square$$

Et enfin

Proposition (inégalité de Minkowski)

Soit $1 \leq p < +\infty$. Alors $\forall x, y \in \mathbb{K}^n$, on a :

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^p\right)^{1/p}, \text{ ie}$$

$$\|x+y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$$ (aussi vrai pour $p = 1, +\infty$, déjà vu)

Dém (cas $1 < p < +\infty$) notons $q = \frac{p}{p-1}$, de sorte que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

osq $x+y \neq 0$, sans quoi il n'y a rien à démontrer.

On a alors $\sum |x_i + y_i|^p = \sum |x_i+y_i|^{p-1} \times |x_i+y_i| \leq \sum |x_i+y_i|^{p-1}|x_i| + \sum |x_i+y_i|^{p-1}|y_i|$

On applique Hölder aux deux dernières sommes :

$$\sum |x_i+y_i|^{p-1}|x_i| \leq \left(\sum |x_i+y_i|^{\frac{p}{p-1}\times p-1}\right)^{1/q} \left(\sum |x_i|^p\right)^{1/p} = \|x+y\|_p^{\frac{p-1}{p}} \|x\|_p$$

et même chose pour l'autre somme, ce qui donne

$\|x+y\|_p^p \leq \|x+y\|_p^{p-1}(\|x\|_p + \|y\|_p)$ soit, en divisant par $\|x+y\|_p^{p-1} > 0$, l'inégalité voulue $\square$

Proposition (équivalence des normes) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $1 \leq p \leq q \leq +\infty$

Alors $\forall x \in \mathbb{K}^n$, $\|x\|_q \leq \|x\|_p \leq \|x\|_q \cdot n^{\underbrace{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}_{\geq 0}}$

(De façon générale, on dit que deux normes sont équivalentes si...)