Déf 1) On dit que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement (ou fonctionnellement) vers une fonction f si
(ou point par point)
$\forall x\in I,\quad f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x)$, ce qui se réécrit :

$\forall x\in I,\ \forall \varepsilon>0,\ \exists N\in\mathbb{N},\quad \forall n\geq N,\quad |f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$

2) On dit que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f

si: $\forall\varepsilon>0,\ \exists N\in\mathbb{N},\ \underbrace{\forall x\in I,\ \forall n\geq N,\ |f_n(x)-f(x)|<\varepsilon}_{\Leftrightarrow\ \forall n\geq N\quad f_n-f \text{ est bornée et } \sup_I|f_n-f|<\varepsilon}$.

se reformule en : les (f_n-f) sont bornées (à partir d'un certain rang) et $\underbrace{\sup_I|f_n-f|}_{\text{TR}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

⚠ dans 1), N dépend a priori de ε et x, alors que dans 2), N ne dépend que de ε.

Exemples, contre-exemples

- $f_n(x)=x^n$ sur $[0,1]$ $\quad\forall x\in[0,1[,\ f_n(x)\to 0$
  pour $x=1\quad f_n(1)=1\to 1$

convergence simple vers $f=\mathbb{1}_{\{1\}}$, mais la convergence n'est pas uniforme : Prenons $\varepsilon=\frac12$, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\exists x\in[0,1[$ tq $x^n\geq\frac12$ donc $|f_n(x)-f(x)|\geq\frac12$.

On verra + généralement qu'une limite uniforme de fonctions continues est continue donc comme les f_n sont continues et pas f, on ne peut pas avoir CVU.

Rq. On a en revanche CVU $\Rightarrow$ CVS

Pour les suites réelles, on avait CV $\Leftrightarrow$ de Cauchy. Ici, pour les suites de fonctions, on va avoir de même CVU $\Leftrightarrow$ U de Cauchy qui signifiera la complétude d'un certain espace de fonctions.
Bien pratique qd on veut montrer la CV sans connaître la limite, typiquement pour résoudre les équa diff !

teasing

Déf On dit qu'une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est uniformément de Cauchy si $\forall\varepsilon>0,\ \exists N\in\mathbb{N},\ \forall x\in I,\ \forall n,m\geq N,\quad |f_n(x)-f_m(x)|<\varepsilon$

exo : le faire deviner

Ceci implique évidemment que chaque suite réelle $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy

Proposition (" Critère de Cauchy uniforme ")

Une suite de f$^{ct^o}$ (f_n) CVU ssi elle est uniformément de Cauchy

Preuve l'un des sens est facile

$\boxed{\Rightarrow}$ comme pour CV $\Rightarrow$ de Cauchy

Soit $\varepsilon > 0$. Par UCV, $\exists N \in \mathbb{N}$, $\forall x \in I$, $\forall n \geq N$, $|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$

Mais alors $\forall n, m \geq N$, $|f_n(x) - f_m(x)| \leq |f_n(x) - f(x)| + |f(x) - f_m(x)| \leq 2 \cdot \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

$\boxed{\Leftarrow}$ $\forall x \in I$, $(f_n(x))$ est de Cauchy dc cv dans $\mathbb{R}$ (complet), on note $f(x)$ sa limite.

Soit $\varepsilon > 0$ et prenons $N \in \mathbb{N}$ tq $\forall x \in I$, $\forall n, m \geq N$, $|f_n(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon$

Cette inégalité étant valable pour tt $m \geq N$, elle reste vraie par passage à la lim qd $m \to +\infty$ ce qui donne $|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$ et ce $\forall x \in I$, $\forall n \geq N$, et on a bien exactement la CVU $\square$.

Maintenant ce qui est important :

Prop Une limite uniforme de fonctions continues est continue.

(Sera vrai dans un cadre + général !)

Dem Soit $I \subset \mathbb{R}$ et une suite de fonctions $f_n : I \to \mathbb{R}$. On suppose que cette suite CVU vers une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ et on veut montrer que f est continue sur I.

Soit $a \in I$ et $\varepsilon > 0$.

- On choisit $N \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq N$, $\forall x \in I$, $|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon/3$ (CVU)
- On choisit $\delta > 0$ tq $\forall x \in I$, $|x - a| < \delta \Rightarrow |f_N(x) - f_N(a)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$ (C^0 de f_N en a)

Ainsi, si $x \in I$ et $|x - a| < \delta$,

$$|f(x) - f(a)| \leq \underbrace{|f(x) - f_N(x)|}_{\leq \varepsilon/3} + \underbrace{|f_N(x) - f_N(a)|}_{\leq \varepsilon/3} + \underbrace{|f_N(a) - f(a)|}_{\leq \frac{\varepsilon}{3}}$$

Ainsi f est C^0 en a, et ce $\forall a \in I$ $\square$

Ex00 Où a-t-on utilisé la CVU plutôt que la CVS de $(f_n)_n$?

exo
trouver un exemple

Il se peut évidemment qu'une limite non uniforme de fonctions continues soit continue, mais on peut mq ça ne peut pas se produire si la suite (f_n) est monotone.

Un dernier thm de cv :

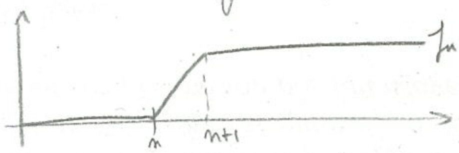
Proposition (thm de Dini) Soit $I = [a,b] \subset \mathbb{R}$ et (f_n) une suite de fonctions continues sur I convergeant simplement vers une fonction f continue. Si la suite (f_n) est monotone alors la convergence est uniforme sur I

⚠ • La conclusion est fausse si I n'est pas fermé. Voir où cela intervient dans la preuve !

ex $f_n(x) = x^n$ sur $[0,1[$. (cf preuve précédente)

• Elle est également fausse si I n'est pas borné :

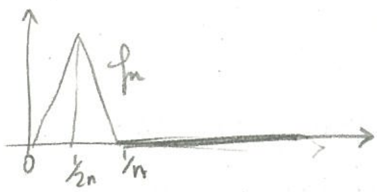
ex



• Elle est également fausse si f n'est pas continue.

ex $f_n(x) = x^n$ sur $[0,1]$

• Enfin bien sûr elle est fausse en général si la suite n'est pas monotone :



Preuve En posant $g_n = \begin{cases} f_n - f & \text{si la suite est décroissante,} \\ f - f_n & \text{si la suite est } \nearrow \end{cases}$

on obtient une suite décroissante (g_n) de fonctions continues convergeant simplement vers 0.

Supposons par l'absurde que la cv n'est pas unif. ∃ alors $\varepsilon > 0$ et une suite d'entiers $(n_k)_{k\in\mathbb{N}} \nearrow$ et une suite $(x_k)_{n\in\mathbb{N}}$ de I tq $\forall k \in \mathbb{N},\ g_{n_k}(x_k) > \varepsilon$. Comme $n_k \geq k$ et (g_n) décroissante on a a fortiori $g_k(x_k) > \varepsilon$. Par Bolzano-Weierstrass, ∃ sc extraite $(x_{k_\ell})_{\ell\in\mathbb{N}}$ qui cv vers un pt $c \in [a,b]$.

Fixons $n \in \mathbb{N}$ pour tt ℓ assez gd pr que $k_\ell \geq n$, $\varepsilon < g_{k_\ell}(x_{k_\ell}) \leq g_n(x_{k_\ell})$

donc en passant à la lim, par continuité de g_n en c, $\varepsilon \leq g_n(c)$ et ce $\forall n \in \mathbb{N}$