§ 5 Fonctions réelles

Dans la suite du cours, on s'intéressera à des espaces vect. (normés) de dimension infinie. Un ex. fondamental est celui des fonctions continues sur un intervalle (fermé borné) de $\mathbb{R}$.

I Propriétés des fonctions continues

Def Soit $I \subset \mathbb{R}$ et f une fonction de I ds $\mathbb{R}$.

a) On dit que f est C^0 au point a de I si

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \delta > 0, \ \forall x \in I, \ |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

b) On dit que f est continue sur I si f est continue en tt point de I.

⚠ la def de continuité en un pt de I fait référence au domaine de def.
Par ex si $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ et $a = 0$, la continuité en a est ce que nous connaissons comme continuité à droite en 0. Dans ce cas, f est C^0 sur $[0,1]$ ssi

- f est C^0 à droite en 0
- ——— gauche en 1
- ——— à droite et à gauche en tt pt intérieur.

Si I est fini, la def est vide, tte fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est C^0.

Rq On verra que c'est le cas pour tout espace discret.

Proposition (critère séquentiel)

Une fonction est continue au pt $a \in I$ ssi pour tte suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de I convergeant vers a, $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $f(a)$.

(On verra que c'est le cas pour tte fonction définie sur un espace "à base dénombrable de voisinages")

Démonstration

(i) la condition est nécessaire. (~~On peut voir $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ comme une application continue (car $\mathbb{N}$ discret) et la composée d'appl continues est continue mais on empiète un peu sur la suite~~)

Supposons f C^0 en a et $(x_n)_n \in I^{\mathbb{N}}$ convergeant vers a.

Soit $\varepsilon > 0$ --- (à faire en cours)

(ii) la condition est suffisante. Procédons par contraposition en supposant que f n'est pas continue. Alors $\exists \varepsilon > 0$ tq $\forall \delta > 0$, on peut trouver $x \in I$ tq $|x-a| < \delta$ et $|f(x) - f(a)| > \varepsilon$
on applique en particulier ça pour $\delta = \frac{1}{n}$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$ et ça nous donne une suite (x_n) tq $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $|x_n - a| < \frac{1}{n}$ et $|f(x_n) - f(a)| > \varepsilon$
(ce qui entraîne $x_n \to a$)
(ce qui empêche $f(x_n) \to f(a)$) $\square$

Un autre résultat sur les fonctions de $\mathbb{R}$ qui fait cette fois intervenir une prop clef de $\mathbb{R}$, celle de la borne sup :

Prop (thm des valeurs intermédiaires) Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et y un réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$. Alors il existe $c \in [a,b]$ tq $f(c) = y$

Corollaire l'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

Se généralisera en : l'image d'un ens connexe par une appl C^0 est connexe

Preuve du TVI (va découler de la propriété de la borne sup. Du coup sera faux pour $\mathbb{Q}$)

Spdg, opsq $f(a) < y < f(b)$ (si $y = f(a)$ ou $f(b)$ on a fini, et si $f(a) \geq f(b)$ considérer $-f$)

Notons $A = \{x \in [a,b] \mid f(x) \leq y\}$.

A est non vide (contient a) et majoré (par b) donc admet une borne sup que l'on note c. On va voir que $f(c) = y$.

Tout d'abord, par la caract séquentielle de la borne sup, $\exists (x_n)$ suite de A qui tend vers c. Or $f(x_n) \leq y$ $\forall n \in \mathbb{N}$, donc par passage à la limite, et continuité de f, $f(c) \leq y$. En particulier $c \neq b$ donc $c < b$

Supposons par l'absurde que $f(c) < y$. Alors on va trouver $d \in [a,b]$, $d > c$, tq $f(d) \leq y$ ce qui contredira le caractère majorant de c.
En effet, posons $\varepsilon = y - f(c) > 0$. Par continuité de f en c, il existe $\delta > 0$ tq $\forall x \in [a,b] \cap]c-\delta, c+\delta[$, $|f(x) - f(c)| < \varepsilon$, en particulier $f(x) < f(c) + y - f(c) = y$
$\neq \emptyset$ puisque $c < b$

Ainsi $f(c) = y$. $\square$

Rq Comme annoncé, cette prop est fausse sur $\mathbb{Q}$. I.29

Considérer $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, $x \mapsto x^2 - 2$ $\quad f(0) = -2$, $f(2) = 4$, f C^0

mais $\nexists x \in \mathbb{Q}$ tq $f(x) = 0$ (déjà vu)

Rappel un intervalle est une partie I de $\mathbb{R}$ tq si $x, y \in I$ et $x < y$, $[x, y] \subset I$.

Leo Preuve du corollaire immédiat

teasing Rq Un autre thm qui vient de ce que les int fermés bornés de $\mathbb{R}$ sont des compacts et qui se généralisera en : l'im d'un compact par une appl C^0 dans un espace séparé est compacte.

Thm Une fonction continue sur un segment $[a,b]$ est bornée et atteint ses bornes.

Preuve (en 2 temps)

1) Montrons par l'absurde que f est bornée.

Supposons qu'elle ne l'est pas. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\exists x_n \in [a,b]$ tq $f(x_n) \geq n$. (x_n) est une suite bornée donc admet une sous-suite convergente $(x_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$, de limite notée l, et comme $a \leq x_n \leq b$ $\forall n$,

$a \leq l = \lim x_n \leq b$ (Note : on utilise ici que l'intervalle est fermé, ne marcherait pas si $I =]a,b[$ car alors l n'appartiendrait pas forcément à I et on ne pourrait alors rien conclure)

Donc f est continue en l, donc par continuité $\lim\limits_{n \to +\infty} f(x_{\varphi(n)}) = f(l)$;

Leo contredit $f(x_{\varphi(n)}) \geq \varphi(n) \geq n$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Contradiction

f est donc bornée $\square$.

2) Notons $A = f([a,b]) = \{f(x) \mid x \in [a,b]\}$. Cet ensemble est non vide et on vient de montrer qu'il est borné donc il admet un sup M.

Il s'agit de montrer que ce sup est atteint.

Or par caractérisation séquentielle du sup, $\exists (x_n) \in [a,b]^{\mathbb{N}}$ tq $f(x_n) \longrightarrow M$. Mais encore une fois il existe une sous suite $(x_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge dans $[a,b]$, et sa limite l satisfait

$$f(l) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{continuité de } f \text{ en } l}}{=} \lim_{n \to \infty} f(x_{\varphi(n)}) = M \quad \text{CQFD} \quad \square$$