§ 5 Fonctions réelles

Dans la suite du cours, on s'intéressera à des espaces vect. (normés) de dimension infinie. Un ex. fondamental est celui des fonctions continues sur un intervalle (fermé borné) de $\mathbb{R}$.

I Propriétés des fonctions continues

Déf Soit $I \subset \mathbb{R}$ et f une fonction de I ds $\mathbb{R}$.

a) on dit que f est C^0 au point a de I si

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \delta > 0, \ \forall x \in I, \ |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(a)| < \varepsilon$$

b) On dit que f est continue sur I si f est continue en tt point de I.

⚠ la déf de continuité en un pt de I fait référence au domaine de déf.
Par ex si $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ et $a = 0$, la continuité en a est ce que nous connaissons comme continuité à droite en 0. Dans ce cas, f est C^0 sur $[0,1]$ ssi

- f est C^0 à droite en 0
- ——— gauche en 1
- ——— à droite et à gauche en tt pt intérieur.

Si I est fini, la déf est vide, tte fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est C^0.

Rq On verra que c'est le cas pour tout espace discret.

Proposition (critère séquentiel)

Une fonction est continue au pt $a \in I$ ssi pour tte suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de I convergeant vers a, $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(a)$.

(On verra que c'est le cas pour tte fonction définie sur un espace "à base dénombrable de voisinages")

Démonstration

(i) la condition est nécessaire. (~~On peut voir $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ comme une application continue (car $\mathbb{N}$ discret) et la composée d'appl continues est continue mais on empiète un peu sur la suite~~)

Supposons f C^0 en a et $(x_n)_n \in I^{\mathbb{N}}$ convergeant vers a.

Soit $\varepsilon > 0$ ... (à faire en cours)

(ii) la condition est suffisante. Procédons par contraposition en supposant que f n'est pas continue. Alors $\exists \varepsilon > 0$ tq $\forall \delta > 0$, on peut trouver $x \in I$ tq $|x-a| < \delta$ et $|f(x) - f(a)| > \varepsilon$

on applique en particulier ça pour $\delta = \frac{1}{n}$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$ et ça nous donne une suite (x_n) tq $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $|x_n - a| < \frac{1}{n}$ et $|f(x_n) - f(a)| > \varepsilon$

(ce qui entraîne $x_n \to a$)

(ce qui empêche $f(x_n) \to f(a)$) $\square$

Un autre résultat sur les fonctions de $\mathbb{R}$ qui fait cette fois intervenir une prop clef de $\mathbb{R}$, celle de la borne sup :

Prop (thm des valeurs intermédiaires) Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et y un réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$. Alors il existe $c \in [a,b]$ tq $f(c) = y$

Corollaire l'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

Se généralisera en : l'image d'un ens connexe par une appl C^0 est connexe

Preuve du TVI (va découler de la propriété de la borne sup. Du coup sera faux pour $\mathbb{Q}$)

spdg, opsq $f(a) < y < f(b)$ (si $y = f(a)$ ou $f(b)$ on a fini, et si $f(a) \geq f(b)$ considérer $-f$)

Notons $A = \{x \in [a,b] \mid f(x) \leq y\}$.

A est non vide (contient a) et majoré (par b) donc admet une borne sup que l'on note c. On va voir que $f(c) = y$.

Tout d'abord, par la caract séquentielle de la borne sup, $\exists (x_n)$ suite de A qui tend vers c. Or $f(x_n) \leq y$ $\forall n \in \mathbb{N}$, donc par passage à la limite, et continuité de f, $f(c) \leq y$. En particulier $c \neq b$ de $c < b$

Supposons par l'absurde que $f(c) < y$. Alors on va trouver $d \in [a,b]$, $d > c$, tq $f(d) \leq y$ ce qui contredira le caractère majorant de c.

En effet, posons $\varepsilon = y - f(c) > 0$. Par continuité de f en c, il existe $\delta > 0$ tq $\forall x \in \underbrace{[a,b] \cap]c-\delta, c+\delta[}_{\neq \emptyset \text{ puisque } c<b}$, $|f(x) - f(c)| < \varepsilon$, en particulier $f(x) < f(c) + y - f(c) = y$

Ainsi $f(c) = y$. $\square$

Rq Comme annoncé, cette prop est fausse sur $\mathbb{Q}$. I.29
Considérer $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, $x \mapsto x^2 - 2$ $\quad f(0) = -2$, $f(2) = 4$, f C^0

mais $\nexists\, x \in \mathbb{Q}$ tq $f(x) = 0$ (déjà vu)

Rappel un intervalle est une partie I de $\mathbb{R}$ tq si $x, y \in I$ et $x < y$, $[x, y] \subset I$.

Preuve du corollaire immédiat

Rq Un autre thm qui vient de ce que les int fermés bornés de $\mathbb{R}$ sont des compacts et qui se généralisera en : l'im d'un compact par une appl C^0 dans un espace séparé est compacte.

teasing

Thm Une fonction continue sur un segment $[a,b]$ est bornée et atteint ses bornes.

Preuve (en 2 temps)

1) Montrons par l'absurde que f est bornée.
Supposons qu'elle ne l'est pas. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\exists\, x_n \in [a,b]$ tq $f(x_n) \geq n$. (x_n) est une suite bornée donc admet une sous-suite convergente $(x_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$, de limite notée l, et comme $a \leq x_n \leq b$ $\forall n$,
$a \leq l = \lim x_n \leq b$ (Note : on utilise ici que l'intervalle est fermé, ne marcherait pas si $I =]a,b[$ car alors l n'appartiendrait pas forcément à I et on ne pourrait alors rien conclure)

Donc f est continue en l, donc par continuité $\lim\limits_{n \to +\infty} f(x_{\varphi(n)}) = f(l)$;
contredit $f(x_{\varphi(n)}) \geq \varphi(n) \geq n$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Contradiction

f est donc bornée $\square$.

2) Notons $A = f([a,b]) = \{f(x) \mid x \in [a,b]\}$. Cet ensemble est non vide et on vient de montrer qu'il est borné donc il admet un sup M.
Il s'agit de montrer que ce sup est atteint.
Or par caractérisation séquentielle du sup, $\exists (x_n) \in [a,b]^{\mathbb{N}}$ tq $f(x_n) \longrightarrow M$. Mais encore une fois il existe une sous suite $(x_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge dans $[a,b]$, et sa limite l satisfait

$$f(l) = \underbrace{\lim_{n \to \infty} f(x_{\varphi(n)})}_{\uparrow} = M \quad \text{CQFD} \quad \square$$

continuité de f en l

Dernière propriété des fonctions continues sur un segment, qui sera généralisée + tard aux fonctions sur un compact.

Def On dit qu'une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est uniformément continue si $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x, y \in I, \ |x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$

exo

Exo Comparer avec la définition de "f C^0 sur I" où δ dépend de x alors qu'il n'en dépend pas dans UC^0

Ainsi $UC^0 \Rightarrow C^0$.

Thm de Heine Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est continue, elle est uniformément continue.

exo

⚠ faux si $[a,b]$ remplacé par un int. non (fermé borné) : trouver un contre-exemple.

Preuve Supposons par l'absurde qu'il existe un $\varepsilon > 0$ tq $\forall \delta > 0$ en particulier $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\exists (x_n, y_n) \in I^2$ tq $|x_n - y_n| \leq \frac{1}{n}$ mais $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$.

(x_n) admet une sous-suite $(x_{\varphi(n)})$ convergeant vers un $c \in [a,b]$.
$(y_{\varphi(n)})$ a alors la même limite, et par continuité de f,
$\lim |f(x_{\varphi(n)}) - f(y_{\varphi(n)})| = |f(c) - f(c)| = 0 \geq \varepsilon$ absurde □.

Nous sommes finalement prêts à étudier les suites de fonctions (révisions?) qui ne sont pas juste une façon d'embêter les étudiants mais sont fondamentales : dès qu'on veut résoudre une équadiff (et elles apparaissent dans ttes les sciences !!) on commence par construire des solutions approchées et on montre qu'elles convergent vers une vraie solution. Il faut donc préciser les ≠ notions de convergence de suites de fonctions.

II. Suites de fonctions

On considère une suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ où $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n est une fonction de I dans $\mathbb{R}$.

Déf 1) On dit que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement (ou ponctuellement) vers une fonction f si
(ou point par point)

$\forall x \in I, \quad f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x)$, ce qui se réécrit :

$\forall x\in I, \forall \varepsilon>0, \exists N\in\mathbb{N}, \quad \forall n\geq N, \quad |f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$

2) On dit que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f

si: $\forall\varepsilon>0, \exists N\in\mathbb{N}, \underbrace{\forall x\in I, \forall n\geq N, |f_n(x)-f(x)|<\varepsilon}$.

$\Leftrightarrow \forall n\geq N \quad f_n-f$ est bornée et $\sup_I |f_n-f|<\varepsilon$

se reformule en : les (f_n-f) sont bornées (à partir d'un certain rang n)

et $\underbrace{\sup_I |f_n-f|}_{\text{pb}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

⚠ dans 1), N dépend a priori de ε et x, alors que dans 2), N ne dépend que de ε.

Exemples, contre-exemples

- $f_n(x)=x^n$ sur $[0,1]$ $\quad \forall x\in[0,1[, \; f_n(x)\to 0$
  pour $x=1 \quad f_n(1)=1\to 1$

convergence simple vers $f=\mathbb{1}_{\{1\}}$, mais la convergence n'est pas uniforme : Prenons $\varepsilon=\frac{1}{2}$, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\exists x\in[0,1[$ tq $x^n\geq\frac{1}{2}$ donc $|f_n(x)-f(x)|\geq\frac{1}{2}$.

On verra + généralement qu'une limite uniforme de fonctions continues est continue donc comme les f_n sont continues et pas f, on ne peut pas avoir CVU.

Rq. On a en revanche CVU $\Rightarrow$ CVS

Pour les suites réelles, on avait CV $\Leftrightarrow$ de Cauchy. Ici, pour les suites de fonctions, on va avoir de même CVU $\Leftrightarrow$ U de Cauchy qui signifiera la complétude d'un certain espace de fonctions.

teasing

Bien pratique qd on veut montrer la CV sans connaître la limite, typiquement pour résoudre les équa diff !

ex : le faire deviner

Déf On dit qu'une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est uniformément de Cauchy si $\forall\varepsilon>0, \exists N\in\mathbb{N}, \forall x\in I, \forall n,m\geq N, \quad |f_n(x)-f_m(x)|<\varepsilon$

Ceci implique évidemment que chaque suite réelle $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy

Proposition (" Critère de Cauchy uniforme ")

Une suite de f[ct]° (f_n) CVU ssi elle est uniformément de Cauchy

Preuve l'un des sens est facile

$\boxed{\Rightarrow}$ comme pour CV ⇒ de Cauchy

Soit $\varepsilon > 0$. Par UCV, $\exists N \in \mathbb{N}$, $\forall x \in I$, $\forall n \geq N$, $|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$

Mais alors $\forall m, n \geq N$, $|f_n(x) - f_m(x)| \leq |f_n(x) - f(x)| + |f(x) - f_m(x)| \leq 2 \cdot \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

$\boxed{\Leftarrow}$ $\forall x \in I$, $(f_n(x))$ est de Cauchy dc cv dans $\mathbb{R}$ (complet), on note $f(x)$ sa limite.

Soit $\varepsilon > 0$ et prenons $N \in \mathbb{N}$ tq $\forall x \in I$, $\forall n, m \geq N$, $|f_n(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon$

Cette inégalité étant valable pour tt $m \geq N$, elle reste vraie par passage à la lim qd $m \to +\infty$ ce qui donne $|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$ et ce $\forall x \in I$, $\forall n \geq N$, et on a bien exactement la CVU □.

Maintenant ce qui est important :

Prop Une limite uniforme de fonctions continues est continue.

(Sera vrai dans un cadre + général !)

Dem Soit $I \subset \mathbb{R}$ et une suite de fonctions $f_n : I \to \mathbb{R}$. On suppose que cette suite CVU vers une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ et on veut montrer que f est continue sur I.

Soit $a \in I$ et $\varepsilon > 0$.

- On choisit $N \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq N$, $\forall x \in I$, $|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon/3$ (CVU)
- On choisit $\delta > 0$ tq $\forall x \in I$, $|x - a| < \delta \Rightarrow |f_N(x) - f_N(a)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$ (C^0 de f_N en a)

Ainsi, si $x \in I$ et $|x - a| < \delta$,

$$|f(x) - f(a)| \leq \underbrace{|f(x) - f_N(x)|}_{\leq \varepsilon/3} + \underbrace{|f_N(x) - f_N(a)|}_{\leq \varepsilon/3} + \underbrace{|f_N(a) - f(a)|}_{\leq \frac{\varepsilon}{3}}$$

Ainsi f est C^0 en a, et ce $\forall a \in I$ □

E100 Où a-t-on utilisé la CVU plutôt que la CVS de $(f_n)_n$?

exo
trouver un exemple

Il se peut évidemment qu'une limite non uniforme de fonctions continues soit continue, mais on peut mq ça ne peut pas se produire si la suite (f_n) est monotone.

Un dernier thm de cv :

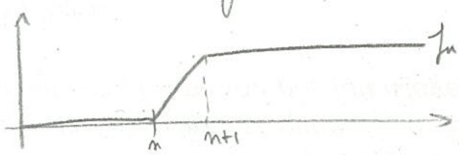
Proposition (thm de Dini) Soit $I = [a,b] \subset \mathbb{R}$ et (f_n) une suite de fonctions continues sur I convergeant simplement vers une fonction f continue. Si la suite (f_n) est monotone alors la convergence est uniforme sur I

⚠ • La conclusion est fausse si I n'est pas fermé. Voir où cela intervient dans la preuve !

ex $f_n(x) = x^n$ sur $[0,1[$. (cf preuve précédente)

• Elle est également fausse si I n'est pas borné :

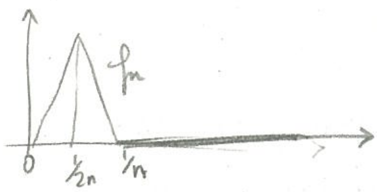
ex



• Elle est également fausse si f n'est pas continue.

ex $f_n(x) = x^n$ sur $[0,1]$

• Enfin bien sûr elle est fausse en général si la suite n'est pas monotone :



Preuve En posant $g_n = \begin{cases} f_n - f & \text{si la suite est décroissante,} \\ f - f_n & \text{si la suite est } \nearrow \end{cases}$

on obtient une suite décroissante (g_n) de fonctions continues convergeant simplement vers 0.

Supposons par l'absurde que la cv n'est pas unif. $\exists$ alors $\varepsilon > 0$ et une suite d'entiers $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ $\nearrow$ et une suite $(x_k)_{n\in\mathbb{N}}$ de I tq $\forall k \in \mathbb{N}$, $g_{n_k}(x_k) > \varepsilon$. Comme $n_k \geq k$ et (g_n) décroissante on a a fortiori $g_k(x_k) > \varepsilon$. Par Bolzano-Weierstrass, $\exists$ sc suite $(x_{k_\ell})_{\ell\in\mathbb{N}}$ qui cv vers un pt $c \in [a,b]$.

Fixons $n \in \mathbb{N}$ pour tt ℓ assez gd pr que $k_\ell \geq n$, $\varepsilon < g_{k_\ell}(x_{k_\ell}) \leq g_n(x_{k_\ell})$

donc en passant à la lim, par continuité de g_n en c, $\varepsilon \leq g_n(c)$ et ce $\forall n \in \mathbb{N}$