§4 Dénombrabilité

Déf On dit qu'un ens. E est dénombrable s'il existe une injection de E dans $\mathbb{N}$

En d'autres termes, un ens. est dénombrable si l'on peut indexer (numéroter) ses éléments à l'aide d'un sous ensemble de $\mathbb{N}$.

Ex : Notamment, tt ensemble fini est dénombrable.

Exo ? $\mathbb{Z}$ est dénombrable :
$$\begin{aligned} \mathbb{Z} &\longrightarrow \mathbb{N} \\ k &\longmapsto \begin{cases} 2k & \text{si } k \geq 0 \\ 2|k|+1 & \text{si } k < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

(On va voir une généralisation de ce procédé)

Prop 1 Soit E un ensemble. Les prop. suivantes sont équivalentes
(i) E est dénombrable
(ii) il existe une surjection de $\mathbb{N}$ ds E
(iii) E est soit fini, soit en bijection ac $\mathbb{N}$.

(On aurait pu prendre (ii) ou (iii) comme définition de dénombrable)

Preuve on va montrer (iii) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (i) $\Rightarrow$ (iii)

(iii) $\Rightarrow$ (ii)
- Si E est en bij. ac $\mathbb{N}$, il n'y a rien à montrer
- si E est vide, la concl. est triviale
- si E est fini non vide, on note $\{x_0, \dots x_n\}$ ses éléments pour un certain $n \in \mathbb{N}$, et on prend alors

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{N} &\longrightarrow E \\ k &\longmapsto \begin{cases} x_k & \text{si } k \in \{0, \dots, n\} \\ x_0 & \text{si } k > n \end{cases} \end{aligned}$$

Cette appl est bien surjective

(ii) $\Rightarrow$ (i) Supposons qu'il existe $\varphi : \mathbb{N} \to E$ surjective
Alors on définit $\psi : E \to \mathbb{N}$ par :
$$\forall x \in E, \quad \psi(x) = \min \underbrace{\{n \in \mathbb{N}, \varphi(n) = x\}}_{\text{ss ens non vide (surj) de } \mathbb{N}}$$

Cette appl est injective car $\varphi \circ \psi(x) = x$ dc $\varphi \circ \psi = id_E$
(dc $\psi(x) = \psi(y) \Rightarrow x = y$)

(i) $\Rightarrow$ (iii) Soit $\varphi : E \to \mathbb{N}$ injective. Supposons que E n'est pas fini (I.24)

il suffit de vérifier que $\varphi(E)$ (qui est en bij ac E) est en bij ac $\mathbb{N}$.

ou encore que tt ss ens infini de $\mathbb{N}$ est en bij ac $\mathbb{N}$

Comment construire cette bijection ?

En définissant
$$n_0 = \min(\varphi(E))$$
$$n_1 = \min(\varphi(E) \setminus \{n_0\})$$
$$\dots$$
$$n_k = \min(\varphi(E) \setminus \{n_0, \dots n_{k-1}\})$$

Cette suite est strictement croissante donc injective, et surjective puisque si $p \in \varphi(E)$ $p = n_{\#\{n \in \varphi(E) / n < p\}}$ $\square$

Rq Certains auteurs appellent dénombrable slt les ensembles en bij ac $\mathbb{N}$. Pour éviter tte confusion on pourra dire que

- E est au plus dénombrable si E s'injecte ds $\mathbb{N}$
- E est infini dénombrable si E est équip. à $\mathbb{N}$.

Rq section, rétracts, Cantor-Bernstein, cf poly Gallay.

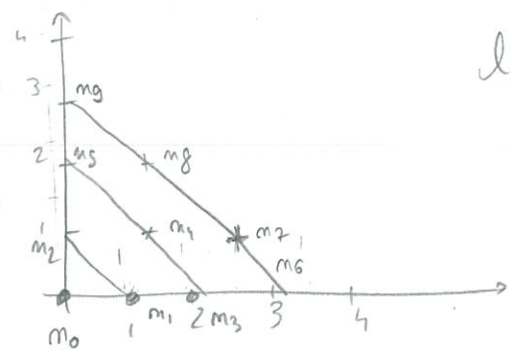
Prop 2 a) Un produit fini d'ensembles dénombrables est dénombrable

b) Une union dénombrable d'ensembles dénombrables est dénombrable

a) Il suffit de le montrer pour un produit de 2 ensembles A et B. On peut supposer que ce sont des parties de $\mathbb{N}$ de la forme $[\![0, n]\!]$ ou $\mathbb{N}$ (en numérotant leurs éléments !)

- Si A et B finis, $A \times B$ aussi dc ok
- Si $A = B = \mathbb{N}$, $A \times B = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ et on numérote comme suit

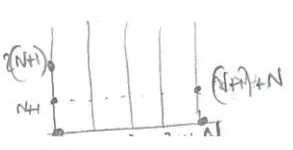
exo
vérifier que c'est bien ce qu'on veut



l'appl est $(k, l) \longmapsto \sum_{i=0}^{k-1} (i+1) + l$

- Si $A = [\![0, N]\!]$ et $B = \mathbb{N}$, on numérote comme suit :

ie $(k, l) \longmapsto l(N+1) + k$



b) On peut supposer que $E = \bigcup_{k \in I} A_k$ où $I \subset \mathbb{N}$ et $A_k \subset \mathbb{N}$ $\forall k$ (I.25)

on peut écrire a_k^i le i^e élt de A_k (dénombrable) pour une énumération fixée de A_k

l'application $F \subset \mathbb{N}\times\mathbb{N} \longrightarrow E$ (là où elle est définie) est surjective

$(k,i) \longmapsto a_k^i$

or $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ est dénombrable d'après a) donc F aussi,

donc il existe une surj de $\mathbb{N}$ ds F donc par composition de $\mathbb{N}$ dans E, donc E est dénombrable $\square$

Conséquences

- $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup (-\mathbb{N})$ est dénombrable (déjà vu)
- $\mathbb{Q}$ est dénombrable (On a une surjection de $\mathbb{Z}\times\mathbb{N}^*$, dénombrable dans $\mathbb{Q}$: $(p,q) \mapsto p/q$)
- l'ens des suites finies d'entiers est dénombrable

$\Downarrow$ l'ens des polynômes à coeff entiers est den

$\Downarrow$

l'ens des racines de tels polynômes est den

ie l'ens des nb algébriques

On va en déduire que $\mathbb{R}$ contient des nb non algébriques (transcendants) car $\mathbb{R}$, lui n'est pas dénombrable.

1ère étape

Proposition : $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ (l'ensemble des suites de 0 et de 1) n'est pas dénombrable.

Preuve (Cantor) Supposons par l'absurde qu'il existe une bijection $\varphi : \mathbb{N} \to \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ ($\varphi(0), \varphi(1), \varphi(2) \ldots \varphi(18)$ sont des suites de 0 et 1 on veut en construire une nouvelle qui ne soit aucune de celles-ci

on déf $\underset{\{0,1\}}{\overset{\in}{x_n}} = 1 -$ n^e élément de la suite $\varphi(n)$

x n'est aucune des suites $\varphi(k)$ puisque leurs k^e élts diffèrent.

dc $x \notin \varphi(\mathbb{N})$, contradiction $\square$

Rq $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ est en bij ac l'ens des parties de $\mathbb{N}$ (vrai en remplaçant $\mathbb{N}$ par n'imp quoi!)

En effet
$$\begin{aligned} \{0,1\}^{\mathbb{N}} &\longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N}) \\ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} &\longmapsto \{n\in\mathbb{N} \mid x_n = 1\} \end{aligned}$$
fournit une telle bijection, de réciproque
$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\mathbb{N}) &\longrightarrow \{0,1\}^{\mathbb{N}} \\ A &\longmapsto (x_n)_n \text{ déf par } x_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n\in A \\ 0 & \text{si } n\notin A \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi $\mathbb{N}$ n'est pas équipotent à l'ensemble de ses parties.
C'est en fait vrai pour n'importe quel ensemble (Cantor Bernstein)

Corollaire $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable (Cantor, 1874)

Preuve
$$\begin{aligned} \varphi : \{0,1\}^{\mathbb{N}} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (a_n)_{n\in\mathbb{N}} &\longmapsto \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a_k}{10^k} \end{aligned}$$
est une injection de $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ dans $\mathbb{R}$, donc $\mathbb{R}$ ne s'injecte pas ds $\mathbb{N}$ sinon par composition $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ s'inj. dans $\mathbb{N}$ $\square$

Preuve + géométrique liée au Cantor triadique :

cf. poly Gallay