Preuve a) $x \in \mathbb{Q} \Rightarrow$ dd périodique à partir de.

Soit $x = p/q \in \mathbb{Q}_+$ (avec $p, q \in \mathbb{N}^*$) ($x=0$ trivial)

Le dd de x, construit précédemment, s'obtient par l'algo de la division eucl :

Définissons en effet $\begin{cases} p = q a_0 + r_0 & (a_0 \in \mathbb{N},\ r_0 \in \{0, \dots, q-1\}) \\ 10 r_{k-1} = q a_k + r_k & (a_k \in \mathbb{N},\ r_k \in \{0, \dots, q-1\} \text{ pr } k \geq 1) \end{cases}$

on a bien $a_0 = [x] = [p/q]$, et $\dfrac{r_k}{q} = 10 \dfrac{r_{k-1}}{q} - \left[10 \dfrac{r_{k-1}}{q}\right]$

ce qui donne par récurrence : $\dfrac{r_k}{q} = 10^k x - [10^k x]$ (*)

et donc $a_k = \left[10 \dfrac{r_{k-1}}{q}\right] = \left[10 \left(10^{k-1} x - [10^{k-1} x]\right)\right]$ dc c'est bien le dd

((*) : ok pour $k=0$

$$\frac{r_k}{q} = 10\left(10^{k-1}x - [10^{k-1}x]\right) - \left[10 \cdot \left(10^{k-1}x - [10^{k-1}x]\right)\right]$$

$$= 10^k x - 10[\cancel{\ }] - [10^k x] + 10[\cancel{\ }]$$)

Mais on rq que la valeur de r_k détermine univoquement a_n et r_n $\forall n > k$. Mais r_k ne peut prendre qu'un nb fini de valeurs ! dc $\exists N \in \mathbb{N}$ tq $r_{n+N} = r_n$ et alors $a_{k+N} = a_k$ $\forall k \geq n$ dc le DD est périodique à partir d'un certain rg. □

b) Si dd périodiq apdcr, $x \in \mathbb{Q}$

$$x = a_0, a_1 \dots a_k b_1 \dots b_l b_1 \dots b_l b_1 \dots b_l \dots \quad (k, l \in \mathbb{N}^*)$$

Alors $10^{k+l} x - 10^k x = a_0 \dots a_k b_1 \dots b_l + \cancel{0, b_1 \dots b_l b_1 \dots b_l \dots}$

$- a_0 \dots a_k - \cancel{0, b_1 \dots b_l b_1 \dots b_l}$

Donc $x = \dfrac{a_0 a_1 \dots a_k b_1 \dots b_l - a_0 \dots a_k}{10^{k+l} - 10^k} = \dfrac{\dots}{\underbrace{9 \dots 9}_{l}\underbrace{0 \dots 0}_{k}} \in \mathbb{Q}$ □

Exemple $x = 0,1232323 = \dfrac{123 - 1}{990} = \dfrac{61}{495}$

Le dd fournit une représentation intuitive commode des nb réels. On l'utilisera dans le prochain § pour montrer que $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable. On peut aussi l'utiliser pour construire le corps des réels, mais il n'est pas commode de montrer ainsi que $\mathbb{R}$ est un corps ! En revanche la propriété de la borne sup s'obtient facilement à partir du dd (I.22)

Rq On peut bien entendu décomposer $\forall x \in \mathbb{R}_+$ dans une base b quelconque ($b \in \mathbb{N}, b \geq 2$). Il suffit de remplacer 10 par b (et 9 par $b-1$) dans $\forall$ ce qui précède. Le cas le + important est $b=2$ (dev^t binaire)

Rq la prop 1 implique immédiatement que $\forall$ réel est limite d'une suite (monotone) de rationnels.