A donner en devoir ? (sujet de CAPES) A faire en TD ?

§3. Développement décimal

(Une autre façon de définir $\mathbb{R}$, mais qu'on va, nous, déduire de notre définition)

On note $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$

Déf 3.1 Soit $x \in \mathbb{R}_+$. On dit qu'une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, avec $a_0 \in \mathbb{N}$ et $a_n \in \{0, \dots, 9\}$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$, est un développement décimal de x si

$$x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{10^n} = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{100} + \dots \quad (*)$$

On écrit alors $x = a_0, a_1 a_2 \dots$

On dit que le dév. est propre s'il ne se termine pas par une infinité de 9.

Rq (i) la série (*) converge pour $\forall (a_n)$ car c'est une série à termes positifs majorée : $\forall N \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{N} \frac{a_n}{10^n} \leq a_0 + \sum_{n=1}^{N} \frac{9}{10^n} = a_0 + \left(1 - \frac{1}{10^N}\right) \leq a_0 + 1$

(ii) On remarque que $0,9999\dots = 1$ car $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{9}{10^n} = 1$

Le DD n'est donc pas unique (si on ne le suppose pas propre)

Justement :

Proposition 1 : $\forall x \in \mathbb{R}_+$ admet un unique développement décimal propre

Notation : pour $x \geq 0$, on note $[x]$ la partie entière de x : $[x] = \sup\{n \in \mathbb{N}, n \leq x\}$ $\underset{\mathbb{N}}{\cap}$

On a immédiatement :
- $[x] \leq x < [x] + 1$, $\forall x \in \mathbb{R}_+$
- $[x] = x$ ssi $x \in \mathbb{N}$
- $[x + k] = [x] + k$ $\forall x \geq 0$, $\forall k \in \mathbb{N}$

Dém (proposition 1)

1) Existence : Comment trouver ces a_n à partir de x ? $\quad 10x - 10[x] - [10x - 10[x]]$

on pose $a_0 = [x]$, $a_1 = [10.(x - [x])]$, $a_2 = [10(10.(x - [x]) - a_1)]$

Plus généralement, $a_n = \underbrace{\left[\underbrace{10\left(\underbrace{10^{n-1}x - [10^{n-1}x]}_{\in[0,1[}\right)}_{\in[0,10[}\right]}_{\in\{0,\dots,9\}}$

par construction, $[10^n x] = \sum_{k=0}^{n} a_k 10^{n-k} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(vérif par récurrence . $n=0$ ok

. si vrai pour n, $a_{n+1} = [10.(10^n x - [10^n x])]$

$= [10^{n+1}x - 10.[10^n x]]$

$= [10^{n+1}x] - 10[10^n x]$

dc $[10^{n+1}x] = \underbrace{a_{n+1} \cdot 10^{n+1-(n+1)} + \underbrace{10 \sum_{k=0}^{n} a_k 10^{n-k}}_{\sum_{k=0}^{n} a_k 10^{n+1-k}}}_{\sum_{k=0}^{n+1} a_k 10^{n+1-k}}$)

Donc

$$\sum_{k=0}^{n} a_k 10^{n-k} \leq 10^n x \leq \sum_{k=0}^{n} a_k 10^{n-k} + 1$$

soit $\sum_{k=0}^{n} a_k 10^{-k} \leq x < \sum_{k=0}^{n} a_k 10^{-k} + 10^{-n} \quad \forall n \geq 0$ (**)

Donc $\left|x - \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{10^k}\right| \leq \underbrace{10^{-n}}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0}$ dc $\boxed{x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{10^n}}$

On a donc prouvé l'existence.

2) le DD ainsi construit est propre. En effet supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tq $\forall k \geq n$, $a_k = 9$

Alors $x = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{10^k} + \underbrace{\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{9}{10^k}}_{= 10^{-n}}$ ce qui contredit (**)

3) unicité supposons que x possède 2 DD propres distincts $a_0, a_1, a_2 \dots$ et $b_0, b_1, b_2 \dots$

Soit $n \in \mathbb{N}$ le + petit entier tq $a_n \neq b_n$, et supposons spdg que $a_n > b_n$

alors $x \geq \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{10^k} \geq \sum_{k=0}^{n} \frac{b_k}{10^k} + \frac{1}{10^n}$

et $x \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{b_k}{10^k} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{b_k}{10^k} < \sum_{k=0}^{n} \frac{b_k}{10^k} + \frac{1}{10^n}$

car (b_k) est propre

absurde □

Proposition 2. Soit $x \in \mathbb{R}_+$, alors $x \in \mathbb{Q}$ ssi son dd propre est périodique à partir d'un certain rang.