A donner en devoir ? (sujet de CAPES)

A faire en TD ?

§3. Développement décimal

(Une autre façon de définir $\mathbb{R}$, mais qu'on va, nous, déduire de notre définition)

On note $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$

Déf 3.1 Soit $x \in \mathbb{R}_+$. On dit qu'une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, avec $a_0 \in \mathbb{N}$ et $a_n \in \{0, \dots, 9\}$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$, est un développement décimal de x si

$$x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{10^n} = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{100} + \dots \quad (*)$$

On écrit alors $x = a_0, a_1 a_2 \dots$

On dit que le dév. est propre s'il ne se termine pas par une infinité de 9.

Rq (i) la série $(*)$ converge pour $\forall$ (a_n) car c'est une série à termes positifs majorée : $\forall N \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{N} \frac{a_n}{10^n} \leq a_0 + \sum_{n=1}^{N} \frac{9}{10^n} = a_0 + \left(1 - \frac{1}{10^N}\right) \leq a_0 + 1$

(ii) On remarque que $0,9999\dots = 1$ car $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{9}{10^n} = 1$

Le DD n'est donc pas unique (si on ne le suppose pas propre)

Justement :

Proposition 1 : $\forall$ $x \in \mathbb{R}_+$ admet un unique développement décimal propre

Notation : pour $x \geq 0$, on note $[x]$ la partie entière de x : $[x] = \sup\{n \in \mathbb{N}, n \leq x\}$ ($\in \mathbb{N}$)

On a immédiatement :
- $[x] \leq x < [x] + 1$, $\forall x \in \mathbb{R}_+$
- $[x] = x$ ssi $x \in \mathbb{N}$
- $[x+k] = [x] + k$ $\forall x \geq 0$, $\forall k \in \mathbb{N}$

Dém (proposition 1)

1) Existence Comment trouver ces a_n à partir de x ?

$10x - 10[x] - [10x - 10[x]]$

on pose $a_0 = [x]$, $a_1 = [10 \cdot (x - [x])]$, $a_2 = [10(10 \cdot (x - [x]) - a_1)]$

Plus généralement, $a_n = \Big[\underbrace{10(\underbrace{10^{n-1}x - [10^{n-1}x]}_{\in [0,1[})}_{\in [0,10[}\Big]$ $\in \{0, \dots, 9\}$

par construction, $[10^n x] = \sum_{k=0}^{n} a_k 10^{n-k} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(vérif par récurrence . $n=0$ ok

. si vrai pour n, $a_{n+1} = [10.(10^n x - [10^n x])]$

$= [10^{n+1} x - 10.[10^n x]]$

$= [10^{n+1} x] - 10[10^n x]$

dc $[10^{n+1} x] = a_{n+1} \cdot 10^{n+1-(n+1)} + \underbrace{10 \sum_{k=0}^{n} a_k 10^{n-k}}_{\sum_{k=0}^{n} a_k 10^{n+1-k}}$

$\underbrace{\qquad\qquad}_{\sum_{k=0}^{n+1} a_k 10^{n+1-k}}$)

Donc

$$\sum_{k=0}^{n} a_k 10^{n-k} \leq 10^n x \leq \sum_{k=0}^{n} a_k 10^{n-k} + 1$$

Soit $\sum_{k=0}^{n} a_k 10^{-k} \leq x < \sum_{k=0}^{n} a_k 10^{-k} + 10^{-n} \quad \forall n \geq 0 \qquad (**)$

Donc $\left| x - \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{10^k} \right| \leq \underbrace{10^{-kn}}_{\xrightarrow[n \to +\infty]{} 0}$ dc $\boxed{x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{10^n}}$

On a donc prouvé l'existence.

2) le DD ainsi construit est propre. En effet supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tq $\forall k \geq n$, $a_k = 9$

Alors $x = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{10^k} + \underbrace{\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{9}{10^k}}_{= 10^{-n}}$ ce qui contredit $(**)$

3) unicité Supposons que x possède 2 DD propres distincts $a_0, a_1 a_2 \ldots$ et $b_0, b_1 b_2 \ldots$

Soit $n \in \mathbb{N}$ le + petit entier tq $a_n \neq b_n$, et supposons spdg que $a_n > b_n$

alors $x \geq \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{10^k} \geq \sum_{k=0}^{n} \frac{b_k}{10^k} + \frac{1}{10^n}$

et $x \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{b_k}{10^k} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{b_k}{10^k} < \sum_{k=0}^{n} \frac{b_k}{10^k} + \frac{1}{10^n}$

car (b_k) est propre

absurde □

Proposition 2. Soit $x \in \mathbb{R}_+$, alors $x \in \mathbb{Q}$ ssi son dd propre est périodique à partir d'un certain rang.

Preuve a) $x \in \mathbb{Q} \Rightarrow$ dd périodique à partir de.

I.21

Soit $x = p/q \in \mathbb{Q}_+$ (avec $p, q \in \mathbb{N}^*$) ($x=0$ trivial)

Le dd de x, construit précédemment, s'obtient par l'algo de la division eucl :

Définissons en effet. $\begin{cases} p = q a_0 + r_0 & (a_0 \in \mathbb{N}, r_0 \in \{0, \dots, q-1\}) \\ 10 r_{k-1} = q a_k + r_k & (a_k \in \mathbb{N}, r_k \in \{0, \dots, q-1\} \text{ pr } k \geq 1) \end{cases}$

on a bien $a_0 = [x] = [p/q]$, et $\frac{r_k}{q} = 10\frac{r_{k-1}}{q} - \left[10\frac{r_{k-1}}{q}\right]$

ce qui donne par récurrence : $\frac{r_k}{q} = 10^k x - [10^k x]$ (*)

et donc $a_k = \left[10\frac{r_{k-1}}{q}\right] = \left[10\left(10^{k-1}x - [10^{k-1}x]\right)\right]$ dc c'est bien le dd

$\left(\begin{array}{l} (*) : \text{ok pour } k=0 \\ \frac{r_k}{q} = 10\left(10^{k-1}x - [10^{k-1}x]\right) - \left[10\left(10^{k-1}x - [10^{k-1}x]\right)\right] \\ \quad = 10^k x - 10[\cancel{\ }] - [10^k x] + 10[\cancel{\ }] \end{array} \right)$

Mais on rq que la valeur de r_k détermine univoquement a_n et r_n $\forall n > k$. Mais r_k ne peut prendre qu'un nb fini de valeurs ! dc $\exists N \in \mathbb{N}$ tq $r_{n+N} = r_n$ et alors $a_{k+N} = a_k$ $\forall k \geq n$ dc le DD est périodique à partir d'un certain rg. $\square$

b) Si dd périodiq apdcr, $x \in \mathbb{Q}$

$x = a_0, a_1 \dots a_k b_1 \dots b_\ell b_1 \dots b_\ell b_1 \dots b_\ell \dots$ $(k, \ell \in \mathbb{N}^*)$

Alors $10^{k+\ell}x - 10^k x = a_0 \dots a_k b_1 \dots b_\ell + \cancel{0, b_1 \dots b_\ell b_1 \dots b_\ell \dots}$

$- a_0 \dots a_k - \cancel{0, b_1 \dots b_\ell b_1 \dots b_\ell}$

Donc $x = \dfrac{a_0 a_1 \dots a_k b_1 \dots b_\ell - a_0 \dots a_k}{10^{k+\ell} - 10^k} = \dfrac{\dots}{\underbrace{9 \dots 9}_{\ell}\underbrace{0 \dots 0}_{k}} \in \mathbb{Q}$ $\square$

Exemple $x = 0,122323$ $= \dfrac{123 - 1}{990} = \dfrac{61}{495}$

Le dd fournit une représentation intuitive commode des nb réels. On l'utilisera dans le prochain § pour montrer que $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable. On peut aussi l'utiliser pour construire le corps des réels, mais il n'est pas commode de montrer ainsi que $\mathbb{R}$ est un corps ! En revanche la propriété de la borne sup s'obtient facilement à partir du dd (I.22)

Rq On peut bien entendu décomposer $\forall x \in \mathbb{R}_+$ dans une base b quelconque ($b \in \mathbb{N}, b \geq 2$). Il suffit de remplacer 10 par b (et 9 par $b-1$) dans tt ce qui précède. Le cas le + important est $b=2$ (dév^t binaire)

Rq la prop 1 implique immédiatement que $\forall$ réel est limite d'une suite (monotone) de rationnels.