§2 Suites réelles

<u>Intro</u> on va revoir la notion de cv et la conséquence éventuelle de la def de $\mathbb{R}$: thm de cv des suites monotones. Puis intro aux notions de compacité et de complétude qui seront des notions clef de ce cours.

Déf 2.1 Une suite réelle est une application $u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$

Elle est complètement définie par les valeurs $u(n)$ $\forall n \in \mathbb{N}$, que l'on note communément u_n. La suite u est elle-même notée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (ou seulement (u_n) pour alléger).

⚠ faire dès maintenant la différence entre

u_n et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

un terme de la suite — la suite toute entière

m̃ différence qu'entre $f(x)$ et f

la valeur de la fonction f au pt x — la fonction.

Déf 2.2 Si $u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ est une suite réelle, on appelle sous-suite ou suite extraite de u toute suite de la forme $u \circ \varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ où $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est une application strictement croissante

La sous-suite sera souvent notée $(u_{\varphi(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ ou $(u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$

(ici $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $k \mapsto n_k$)

Déf/proposition principale 2.3 On dit qu'une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $l \in \mathbb{R}$ si

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists N \in \mathbb{N} \text{ tq } \forall n \geq N, \ |x_n - l| \leq \varepsilon. \quad (*_\varepsilon)$$

Un tel l est alors unique, s'appelle limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, et on note $l = \lim_{n\to+\infty} u_n$

Rq Oups. On n'a jamais dit ce qu'était la valeur absolue sur $\mathbb{R}$ que l'on veut de définir : $|x| = \max(x, -x)$ et on peut vérifier juste avec les axiomes de def de $\mathbb{R}$ que $|x+y| \leq |x| + |y|$ $\forall x, y \in \mathbb{R}$.

exo Rq (i) On peut changer les inégalités larges pour des strictes sans changer la def (une suite satisfait $(*_\leq)$ ssi elle satisfait $(*_<)$) mais pour ça il faut bien garder le "$\forall \varepsilon$"

exo (ii) preuve de l'unicité (si existence) : soient l, l' satisfaisant la prop $(*)$

Supposons $l < l'$.

Posons $\varepsilon = \frac{l'-l}{2} > 0$

$\exists N_1 \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq N_1, \quad |u_n - l| < \varepsilon$

$\exists N_2$ ——— N_2, $|u_n - l'| < \varepsilon$

Mais alors $\forall n \geq \max(N_1, N_2)$, $\underset{\substack{\shortparallel \\ l'-l}}{|l - l'|} \leq |l - u_n| + |u_n - l'| < 2\varepsilon = l' - l$

absurde □

(iii) ex de suite non convergente : $\cdot\ u_n = n$

$\cdot\ u_n = (-1)^n \ldots$

exo (iv) Si une suite cv, toute sous-suite cv vers la m̂ limite.

Suites et borne sup

Prop 1 Toute suite réelle croissante et majorée converge.

(faux ds $\mathbb{Q}$!)

Preuve $A = \{x_n, n \in \mathbb{N}\}$ est non vide et majoré donc admet une borne sup $l \in \mathbb{R}$. Montrons que (u_n) cv vers l.

Soit $\varepsilon > 0$. $l - \varepsilon < l$ donc $\exists x \in A$ tq $l - \varepsilon < x$ sinon l ne serait pas la borne sup de A, ie $\exists N \in \mathbb{N}$ tq $l - \varepsilon < u_N$.

Mais alors $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq N$, $l - \varepsilon < \underbrace{u_N \leq u_n}_{\text{croissance}} \underbrace{\leq l}_{l \text{ majorant de } A}$

donc $-\varepsilon \leq u_n - l \leq 0 \leq -\varepsilon$ donc $|u_n - l| \leq \varepsilon$. On a bien mq

$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |u_n - l| \leq \varepsilon$ CQFD □

De même ↑te suite ↘ et minorée converge.

Prop 2 (caractérisation de la borne sup)

Soit $A \subset \mathbb{R}$ une partie non vide et majorée, et m un majorant de A. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1) $m = \sup(A)$;
2) $\forall \varepsilon > 0$, $\exists x \in A$ tq $m - \varepsilon < x$
3) il existe une suite d'élts de A qui cv vers m.

Preuve $\boxed{1) \Rightarrow 2)}$ Si 2) n'est pas vrai, $\exists \varepsilon > 0$ tq $\forall x \in A$, $x \leq m - \varepsilon$ dc $m - \varepsilon$ est un maj de A strictement inférieur à m donc 1) n'est pas vrai.

$\boxed{2) \Rightarrow 3)}$ Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, on choisit (AC dénombrable) $x_n \in A$ tq $m - \frac{1}{n+1} \leq x_n \leq m$ (possible d'après 2 car $\varepsilon = \frac{1}{n+1} > 0$) On a alors $\forall n \in \mathbb{N}$ $|x_n - m| \leq \frac{1}{n+1}$ et on en déduit facilement (on ne va pas ↑t refaire non plus) que (x_n) cv vers m. dc 3).

$\boxed{3) \Rightarrow 1)}$ Montrons que ↑t majorant de A est $\geq m$: si $\tilde{m}$ maj de A, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\tilde{m} \geq u_n$ donc $\tilde{m} \geq \lim u_n = m$ (encore une prop. classique)

CQFD.

Bon, mais pour les suites, il n'y a pas que convergente / pas conv, il y a des notions + fines, à commencer par celle de valeur d'adhérence (ou dira aussi "pt d'accumulation")

Def 2.4 On dit que $l \in \mathbb{R}$ est une valeur d'adhérence / un pt d'accumulation d'une suite u si $\forall \varepsilon > 0$, il existe une infinité d'entiers $n \in \mathbb{N}$ tq $|u_n - l| < \varepsilon$:

$$\forall \varepsilon > 0, \ \#\{n \in \mathbb{N}, \ |x_n - l| < \varepsilon\} = +\infty.$$

Exemple $(u_n) = ((-1)^n)$ a deux valeurs d'adhérence, ± 1.

Proposition les affirmations suivantes sont équivalentes

a) l est une valeur d'adhérence de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$
b) il existe une sous-suite de (u_n) qui converge vers l.

Dem a $\Rightarrow$ b Si l est une valeur d'adhérence, on construit par récurrence une suite strictement croissante d'entiers $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ en posant
$$\begin{cases} n_0 = 0 \\ \forall k \geq 1,\ n_k = \min\left\{ n\in\mathbb{N} \mid n > n_{k-1} \text{ et } |x_n - l| \leq \frac{1}{k} \right\} \end{cases}$$

cet ens est non vide car $\left\{ n\in\mathbb{N} \mid |x_n - l| < \frac{1}{k} \right\}$ est infini par def de valeur d'adhérence, $\frac{1}{k}$ étant >0.

On a alors $\forall k\in\mathbb{N}^*\ |u_{n_k} - l| \leq \frac{1}{k}$ or $\frac{1}{k} \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$ donc $u_{n_k} \xrightarrow[k\to+\infty]{} l$.

b $\Rightarrow$ a supposons qu'il existe une sous suite $(u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ cv vers l.

alors $\forall \varepsilon > 0,\ \exists K\in\mathbb{N},\ \forall k \geq K,\ |u_{n_k} - l| < \varepsilon$

donc $\{ n\in\mathbb{N},\ |u_n - l| < \varepsilon \} \supset \{ n_k,\ k \geq K \}$ qui est infini car en bijection avec $[\![K, +\infty[\![$ car (n_k) strict. $\nearrow$

Donc $\{ n\in\mathbb{N},\ |u_n - l| < \varepsilon \}$ est infini. $\square$

Conséquence Si (u_n) converge vers l, ttes ses ss-suites aussi, donc l est l'unique valeur d'adhérence de la suite.

Mais ⚠, avoir une unique valeur d'adhérence ne suffit pas à converger.

ex $u_n = \begin{cases} n \text{ si } n \equiv 0 [4] \\ -n \text{ si } n \equiv 2 [4] \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$; 0 est l'unique valeur d'adhérence mais $+\infty$ et $-\infty$ en sont d'autres en quelque sorte...

Par contre si on rajoute (u_n) bornée... cf + tard

$\boxed{\text{Def } 2.5}$ Soit (u_n) une suite réelle bornée (majorée & minorée)

On définit $l_- = \liminf\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \inf\limits_{k\geq n} u_k \in \mathbb{R}$

$l_+ = \limsup\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \sup\limits_{k\geq n} u_k \in \mathbb{R}$

Pourquoi est-ce bien défini ?

lim inf : $\forall n \in \mathbb{N}$, $A_n = \{u_k, k \geq n\}$ est non vide et minoré donc admet une borne inf que l'on va noter a_n^-.

Aff : (a_n^-) est une suite croissante. En effet, de façon générale, $A \subset B$ minorés $\Longrightarrow \inf A \geq \inf B$

ici, $A_n \supset A_{n+1}$ donc $\inf A_{n+1} \geq \inf A_n$.

(a_n^-) est dc $\nearrow$ et majorée par n'importe quel élément de $\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$ dc (prop. fond.) elle converge

lim sup : idem.

Prop Soit (u_n) une suite réelle bornée et l_- et l_+ comme ci-dessus.
Alors i) l_- et l_+ sont des valeurs d'adhérence de (u_n)
ii) Toute valeur d'adhérence a appartient à $[l_-, l_+]$
iii) (u_n) cv ssi $l_- = l_+$, auquel cas $\lim u_n = l_- = l_+$.

Preuve (i) $l_- = \lim\limits_{n \to +\infty} \inf\limits_{k \geq n} u_k$

Soit $\varepsilon > 0$. Montrons que $\forall N \in \mathbb{N}$, $\exists n \geq N$ tq $|u_n - l| < \varepsilon$

(Alors $\{n \in \mathbb{N} \mid |u_n - l| < \varepsilon\}$ sera infini puisqu'il contiendra des entiers arbitrairement grands alors que tt ss ens. fini de $\mathbb{N}$ est majoré)

def de lim — Soit $N \in \mathbb{N}$. $\exists N_1 \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq N_1$ $\left|\inf\limits_{k \geq n} u_k - l^-\right| < \frac{\varepsilon}{2}$

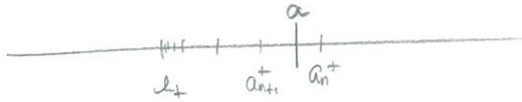
C'est a fortiori vrai $\forall n \geq \max(N, N_1) = N_2$

caract de la borne inf — Or $\exists k \geq N_2$ tq $\left|u_k - \inf\limits_{k \geq N_2}\right| < \frac{\varepsilon}{2}$ et alors

exo ?

$|u_k - l| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ donc k convient. Même chose pour l^+.

(ii) Si $a > l_+$



$\exists N \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq N$, $a_n^+ < l^+ + \underbrace{\frac{(a - l^+)}{2}}_{>0}$

Or $\forall k \geq N$, $u_k \leq a_N^+ < a - \frac{(a - l_+)}{2}$

dc $|u_k - a| \geq \frac{a - l_+}{2} > 0$

donc a n'est pas valeur d'adhérence. Même chose pour $a < l_-$.

(iii) si (u_n) cv, elle a une seule valeur d'adhérence, sa limite l, et d'après (i) $l_+ = l_- = l$

Réciproquement si $l_+ = l_- = l$. $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq N$

$$\underset{= l-\varepsilon}{l_- - \varepsilon} \leq \inf_{k \geq n} u_k \leq u_n \leq \sup_{k \geq n} u_k \leq \underset{= l+\varepsilon}{l_+ + \varepsilon}$$

dc $|u_n - l| \leq \varepsilon$, dc (u_n) cv vers l □

Corollaire (thm de Bolzano-Weierstrass)

Toute suite réelle bornée admet | une sous suite convergente
| une valeur d'adhérence

Rq On verra + tard que cela se reformule en : "les fermés bornés de $\mathbb{R}$ sont compacts"

Nous allons maintenant voir une autre prop de $\mathbb{R}$, qui provient de la borne sup et qui exprime le fait que $\mathbb{R}$ "n'a pas de trou" (On dit que $\mathbb{R}$ est (encore...) "complet") et qui passe par la notion de suite de Cauchy.

Notons que la def de cv d'une suite passe par celle de limite. Or il y a une autre notion assez naturelle de cv :

Def 2.6 On dit qu'une suite (u_n) (cv au sens de Cauchy) est de Cauchy si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$, $\forall m, n \geq N$, $|u_n - u_m| < \varepsilon$

Exo Toute suite convergente est de Cauchy (utiliser l'$\leq$ triangulaire)

Thm Dans $\mathbb{R}$, la réciproque est vraie : toute suite réelle de Cauchy converge dans $\mathbb{R}$.

Faux dans $\mathbb{Q}$ prendre une suite de rationnels qui convergent vers un irrationnel (existe par densité de $\mathbb{Q}$ ds $\mathbb{R}$)

Exo Alors cette suite est de Cauchy mais ne cv pas dans $\mathbb{Q}$ par unicité de la limite dans $\mathbb{R}$.

Preuve du thm : Soit (u_n) une suite de Cauchy réelle. Alors

(i) (u_n) est bornée. En effet, par définition, $\exists N \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq N$,
$|u_n - u_N| \leq \underset{(\varepsilon > 0)}{1}$ donc $|u_n| \leq 1 + |u_N|$)
et + généralement, $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leq \max(|u_0|, \dots, |u_{N-1}|, 1+|u_N|)$

(ii) Par Bolzano Weierstrass elle admet une sous-suite convergeant vers un réel l, (u_{n_k})

(iii) Etant donné $\varepsilon > 0$, on choisit

- $N_1 \in \mathbb{N}$, $\forall n, m \geq N_1$, $|u_n - u_m| \leq \varepsilon/2$ (Cauchy)
- $N_2 \in \mathbb{N}$, $\forall k \geq N_2$, $|u_{n_k} - l| \leq \varepsilon/2$ (convergence)

Alors si $m \geq N_1$ et $k \geq \max(N_1, N_2)$, on a

$$|u_m - l| \leq \underbrace{|u_m - u_{\underbrace{n_k}_{\geq k \geq N_1}}|}_{\leq \varepsilon/2} + \underbrace{|u_{n_k} - l|}_{\leq \varepsilon/2} \leq \varepsilon$$

On a donc montré que (u_n) cv vers l □

La proposition ci dessus établit la complétude de $\mathbb{R}$, notion importante qui fera l'objet du chap 4. On peut montrer qu'un corps ordonné archimédien et complet a la prop de la borne sup dc est isomorphe à $\mathbb{R}$. On aurait pu définir $\mathbb{R}$ comme ça et dérouler le cours à rebours. + précisément c'est une façon de déf. $\mathbb{R}$: comme complétion de $\mathbb{Q}$ - On y reviendra peut être à la fin du cours

(*) oubli (conséquence de la complétude) cf p. suivante

On mentionne pour terminer une prop. de $\mathbb{R}$ qui aurait aussi pu servir à le caractériser (mais que l'on déduit ici de la prop. de la borne sup), celle des segments emboîtés (un corps ord. archi qui possède cette prop a celle de la borne sup, dc est isom à $\mathbb{R}$)

Prop des segments emb. ou des suites adjacentes : si $I_n = [a_n, b_n]$ est une suite de segments non vides tq (i) $I_{n+1} \subset I_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$
(ii) $b_n - a_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

Alors $I = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n$ est un singleton $\{l\}$ ($(a_n)\nearrow$ maj, $(b_n)\searrow$ min
$I = \{l\}$ où $l = \lim a_n = \lim b_n$)

(*) oubli

La complétude est fort utile pour établir la cv de séries ds $\mathbb{R}$: Par ex, pour $x \in \mathbb{R}$, on peut définir $e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$, $\cos(x) = \dots$ $\sin(x) = \dots$

Les fonctions réciproques peuvent être construites par le m procédé que la racine carrée : $\ln(x) = \sup \{y \in \mathbb{R} \mid e^y \leq x\}$ etc

---

Idée de la construction de $\mathbb{R}$ à partir des suites de Cauchy de $\mathbb{Q}$. (cf Wikipedia)