Université Pierre et Marie Curie **2012-2013**
M1 – MM049

Transport de champ de vecteurs

Exercice 1.— Passage en polaires. On considère le champ de vecteurs Y défini par :

$$Y : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (-y,x). \end{array}$$

Soit $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ et $\gamma : J \to \mathbb{R}^2$ la solution maximale de $(x,y)' = Y(x,y)$ satisfaisant $\gamma(0) = (x_0,y_0)$. *Le temps de l'exercice, on oublie que l'on sait résoudre cette équation.*

1. Montrer que $\gamma(t) \neq (0,0)$ pour tout $t \in J$.

Il existe alors des fonctions $r : J \to \mathbb{R}_+^*$ et $\theta : J \to \mathbb{R}$ de classe C^1 telles que $\gamma(t) = (r(t)\cos\theta(t), r(t)\sin\theta(t))$ pour tout $t \in J$.

2. Donner un système d'équations différentielles dont (r,θ) est solution. En déduire (r,θ), puis γ.

Reformulation en termes de transport de champ de vecteurs

Soit Φ l'application définie par :

$$\Phi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \\ (r,\theta) & \mapsto & (r\cos\theta, r\sin\theta) \end{array}$$

3. Quelle est l'image par Φ d'une demi-droite horizontale $\mathbb{R}_+^* \times \{\theta_0\}$, $\theta_0 \in \mathbb{R}$? d'une droite verticale $\{r_0\} \times \mathbb{R}$, $r_0 \in \mathbb{R}_+^*$? Φ définit-elle un difféomorphisme de $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$?

4. Calculer $X = \Phi^* Y$.

5. Déterminer les solutions de $(r,\theta)' = X(r,\theta)$.

6. Soit γ une telle solution. Montrer que $\Phi \circ \gamma$ est solution de $(x,y)' = Y(x,y)$. Toutes les solutions de cette dernière équation sont-elles de cette forme ?

Exercice 2.— Redressement global ? On considère le champ de vecteurs

$$X : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (\cos(y), \sin(y)). \end{array}$$

1. Ce champ de vecteurs est-il complet ?

2. Représenter l'ensemble des points où X est horizontal (resp. vertical). Trouver des droites dont un paramétrage (à expliciter) est solution de $(x,y)' = X(x,y)$.

3. Déterminer l'ensemble des translations qui laissent X invariant (i.e l'ensemble des translations T telles que $T^*X = X$).

4. Trouver un ensemble compact $K \subset \mathbb{R}^2$ vérifiant : pour tout t, $\Phi^t(K) \cap K \neq \emptyset$, où $(\Phi^t)_{t\in\mathbb{R}}$ est le flot associé à X.

5. Quel est le flot associé à un champ de vecteurs constant $Y \equiv \vec{u}$ sur $\mathbb{R}^2$?

6. En déduire qu'il n'existe pas de difféomorphisme $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ redressant globalement le champ X, c'est-à-dire tel que le champ f^*X soit un champ de vecteurs constant.

Exercice 3.— Courbe tangente à un champ de vecteurs. Soit X un champ de vecteurs C^1 ne s'annulant pas sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ et Γ une courbe C^1 tangente à X en chacun de ses points. Montrer que Γ admet un paramétrage solution de l'équation $x' = X(x)$.