TD6 : Séries de Fourier

Correction partielle.

Exercice 1 On avait vu que la fonction $f=|\sin|$ était 2π-périodique, C^1 par morceaux et C^0 sur $\mathbb{R}$, et qu'on pouvait donc lui appliquer le théorème "sans nom". Il fallait donc calculer ses coefficients de Fourier. f étant paire, on sait déjà que : $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $b_n(f)=0$ et $a_n(f)=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(t)\cos(nt)dt=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin t\cos nt\,dt$.

Or $\sin t.\cos(nt)=\frac{\sin(t+nt)+\sin(t-nt)}{2}=\frac{\sin((1+n)t)+\sin((1-n)t)}{2}$

Ainsi, $a_1(f)=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin(2t)dt=\frac{2}{\pi}\left[-\frac{\cos 2t}{2}\right]_0^\pi=0$

$$\forall n\geq 2,\quad a_n(f)=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\Big(\sin((1+n)t)+\sin((1-n)t)\Big)dt$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[-\frac{\cos((1+n)t)}{1+n}-\frac{\cos((1-n)t)}{1-n}\right]_0^\pi$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[-\frac{\overbrace{\cos((n+1)\pi)}^{(-1)^{n+1}}}{n+1}-\frac{\overbrace{\cos((1-n)\pi)}^{(-1)^{n-1}}}{1-n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{1-n}\right]$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\frac{(-1)^n}{n+1}-\frac{(-1)^n}{n-1}+\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n-1}\right]$$

$$=\frac{((-1)^n+1)}{\pi}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n-1}\right)$$

$$=\frac{-2}{\pi}\,\frac{(-1)^n+1}{n^2-1}=\begin{cases}-\frac{4}{\pi(n^2-1)} & \text{si } n \text{ pair}\\ 0 & \text{si } n \text{ impair}\end{cases}\qquad (*)$$

Enfin $a_0(f)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)dt \underset{f \text{ paire}}{=} \frac{1}{\pi}\int_0^\pi f(t)dt=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin t\,dt=\frac{1}{\pi}\left[-\cos t\right]_0^\pi=\frac{2}{\pi}$

On a donc, d'après le théorème "sans nom" (théorème de convergence normale des séries de Fourier) :

$$\forall x\in\mathbb{R}\qquad f(x)=|\sin x|=a_0(f)+\sum_{n=1}^{+\infty}a_n(f)\cos nx+b_n(f)\sin nx$$

$$=\frac{2}{\pi}+\sum_{n=1}^{+\infty}a_n(f)\cos(nx)$$

$$=\frac{2}{\pi}+\sum_{k=1}^{+\infty}a_{2k}(f)\cos(2kx)\quad \text{d'après } (*)$$

Donc : $\forall x \in \mathbb{R}$, $$|\sin x| = \frac{2}{\pi} + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(-\frac{4}{\pi((2k)^2-1)}\right)\cos(2kx)$$

$$= \frac{2}{\pi} + \underbrace{\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{4}{\pi(4k^2-1)}\left(2\sin^2(kx) - 1\right)}$$

$$\underset{(**)}{=} \frac{2}{\pi} - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{4}{\pi(4k^2-1)} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{8\sin^2(kx)}{\pi(4k^2-1)}$$

(On peut couper la somme en deux car les séries $\sum_{TG} \frac{4}{\pi(4k^2-1)}$ et $\sum_{TG} \frac{8\sin^2 kx}{\pi(4k^2-1)}$ sont convergentes. En effet, $\forall k \geq 1$, $\frac{4}{\pi(4k^2-1)} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{\pi k^2}$, TG d'une série CV par Riemann, donc $\sum \frac{4}{\pi(4k^2-1)}$ CV par comparaison $\left(\frac{1}{\pi k^2} \geq 0 \ \forall k \geq 1\right)$, et $\forall k \geq 1$, $\left|\frac{8\sin^2 kx}{\pi(4k^2-1)}\right| \leq \frac{8}{\pi(4k^2-1)} \underset{+\infty}{\sim} \frac{2}{\pi k^2}$ et la suite est similaire)

L'égalité $(**)$ étant vraie pour tout $x \in \mathbb{R}$, elle l'est en particulier pour $x = 0$, où elle devient :

$$0 = \frac{2}{\pi} - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{4}{\pi(4k^2-1)} + \underbrace{\sum_{k=1}^{+\infty} 0}_{0}$$

de sorte que $$\frac{2}{\pi} - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{4}{\pi(4k^2-1)} = 0$$

Ainsi, on a bien finalement : $\forall x \in \mathbb{R}$, $|\sin x| = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{8\sin^2(kx)}{\pi(4k^2-1)}$ $\square$.

Exercice 2 1. Ici on ne demande pas d'invoquer un thm mais simplement de calculer les coefficients de Fourier de la fonction f.

$\forall n \in \mathbb{Z}$, $c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{(a-in)t}\,dt = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{e^{(a-in)t}}{a-in}\right]_0^{2\pi}$ ($a \neq 0$ donc $a - in \neq 0$)

$$= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{e^{2\pi a}-1}{a-in}\right) = \frac{e^{2\pi a}-1}{2\pi} \cdot \frac{a+in}{a^2+n^2}$$

Déduisons-en le DSF réel de f :

$$a_0(f) = c_0(f) = \frac{e^{2\pi a}-1}{2\pi a}$$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_n(f) = c_n(f) + c_{-n}(f) = c_n(f) + \overline{c_n(f)}$ car f est à valeurs réelles

$$= 2\,\mathrm{Re}(c_n(f))$$

$$= \frac{(e^{2\pi a}-1)a}{\pi(a^2+n^2)}$$

et $b_n(f) = i\left(c_n(f) - c_{-n}(f)\right) = i\left(c_n(f) - \overline{c_n(f)}\right) = i\left(2i\,\mathrm{Im}(c_n(f))\right) = -2\,\mathrm{Im}(c_n(f))$

$$= -\frac{(e^{2\pi a}-1)n}{\pi(a^2+n^2)}.$$

Ainsi, le DSF de f est : $\dfrac{e^{2\pi a}-1}{2\pi a} + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(e^{2\pi a}-1)a}{\pi(a^2+n^2)}\cos(nX) - \left(\frac{(e^{2\pi a}-1)n}{a^2+n^2}\sin(nX)\right)$

2. f est C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$. En effet, il suffit de prouver qu'elle l'est sur $[0, 2\pi]$, or elle coïncide sur $[0, 2\pi[$ avec $x \mapsto e^{ax}$ qui est C^∞ sur $\mathbb{R}$. On peut donc appliquer le théorème de Dirichlet qui donne :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} = \frac{e^{2\pi a}-1}{\pi}\left(\frac{1}{2a} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a}{a^2+n^2}\cos nx - \frac{n}{a^2+n^2}\sin nx\right)$$

En particulier,

$$\frac{f(0^+) + f(0^-)}{2} = \frac{e^{2\pi a}-1}{\pi}\left(\frac{1}{2a} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a}{a^2+n^2}\right)$$

$$\shortparallel$$

$$\frac{1 + e^{2\pi a}}{2}$$

et donc $\dfrac{\pi}{2}\dfrac{(e^{2\pi a}+1)}{e^{2\pi a}-1} = \dfrac{1}{2a} + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a}{a^2+n^2}$ soit $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a}{a^2+n^2} = \frac{\pi}{2}\frac{e^{2\pi a}+1}{e^{2\pi a}-1} - \frac{1}{2a}$

et enfin : $(\forall a \neq 0)$ $\quad \underbrace{\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a^2+n^2}}_{1} = \underbrace{\frac{1}{a}\left(\frac{\pi}{2}\frac{e^{2\pi a}+1}{e^{2\pi a}-1} - \frac{1}{2a}\right)}_{2}.$

Calculons la limite quand a tend vers 0 des deux membres de cette égalité.

1 Montrons que $\begin{array}{l}\mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ a \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+a^2}\end{array}$ est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$.

- $\forall n \geq 1$, $a \mapsto \dfrac{1}{a^2+n^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$

- $\forall n \geq 1$, $\forall a \in \mathbb{R}$, $\left|\dfrac{1}{a^2+n^2}\right| \leq \dfrac{1}{n^2}$, et $\sum \dfrac{1}{n^2}$ CV par Riemann

donc $\sum \dfrac{1}{X^2+n^2}$ CVN sur $\mathbb{R}$.

Par théorème de continuité, $a \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a^2+n^2}$ est (bien définie et) C^0 sur $\mathbb{R}$.

En particulier, la continuité en 0 donne :

$$\boxed{\lim_{a\to 0}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{a^2+n^2}} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{0^2+n^2} = \boxed{\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}}$$

(2) On cherche un DL à l'ordre 0 de (2). Pour cela, on se rend compte (au brouillon) qu'on a besoin d'un DL de $e^{2\pi a}+1$ à l'ordre 2 et de $e^{2\pi a}-1$ à l'ordre 3 :

$$\frac{e^{2\pi a}+1}{e^{2\pi a}-1} = \frac{1+2\pi a+\frac{(2\pi a)^2}{2}+o(a^2)+1}{1+2\pi a+\frac{(2\pi a)^2}{2}+\frac{(2\pi a)^3}{6}+o(a^3)-1} = \frac{\cancel{2}+\cancel{2}\pi a+\cancel{2}\pi^2a^2+o(a^2)}{\cancel{2}\pi a+\cancel{2}\pi^2a^2+\cancel{2}\left(\frac{2(\pi a)^3}{3}\right)+o(a^3)}$$

$$= \frac{1+\pi a+\pi^2a^2+o(a^2)}{\pi a\left(1+\pi a+\frac{2(\pi a)^2}{3}+o(a^2)\right)} = \frac{1}{\pi a}\left(1+\pi a+\pi^2a^2+o(a^2)\right)\left(1-\pi a-\underbrace{\frac{2(\pi a)^2}{3}+\pi^2a^2}_{\frac{\pi^2a^2}{3}}+o(a^2)\right)$$

$$= \frac{1}{\pi a}\left(1+\cancel{\pi a}-\cancel{\pi a}+\cancel{\pi^2a^2}+\cancel{(\pi a)(-\pi a)}+\frac{\pi^2a^2}{3}+o(a^2)\right)$$

donc $\frac{\pi}{2}\left(\frac{e^{2\pi a}+1}{e^{2\pi a}-1}\right)-\frac{1}{2a} = \frac{1}{2a}\left(1+\frac{\pi^2a^2}{3}+o(a^2)\right)-\frac{1}{2a} = \frac{\pi^2}{6}a+o(a)$

et enfin (2) $= \frac{\pi^2}{6}+o(1)$, ie $\lim_{a\to 0}$ (2) $= \frac{\pi^2}{6}$

Finalement, comme (1) = (2) , leurs limites quand a tend vers 0 sont égales, ie :

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}}$$

3. On a vu que $\forall a\neq 0$, $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a}{a^2+n^2} = \underbrace{\frac{\pi}{2}\,\frac{e^{2\pi a}+1}{e^{2\pi a}-1}}_{\xrightarrow[a\to+\infty]{}\frac{\pi}{2}} - \underbrace{\frac{1}{2a}}_{\xrightarrow[a\to+\infty]{}0}$

donc $\boxed{\lim_{a\to+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a}{a^2+n^2} = \frac{\pi}{2}}$ $\left(\neq \sum_{n=1}^{+\infty}\underbrace{\left(\lim_{a\to+\infty}\frac{a}{a^2+n^2}\right)}_{=0}\right)$

(C'est donc un exemple de situation où on ne peut pas intervertir Σ et lim)

Exercice 3 Vu en TD

Exercice 4 1. Vu en TD

2. Commençons par vérifier que la fonction f est bien définie ! (ie que, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sum_{TG} c_n e^{inx}$ converge)

Par hypothèse, $c_n = o(|n|^{-k-1-\varepsilon})$ donc comme $k \geq 0$, $c_n = o(|n|^{-1-\varepsilon})$

Or $\sum_{TG} \frac{1}{|n|^{1+\varepsilon}}$ cv par Riemann donc par comparaison $\sum_{TG} |c_n|$ CV,

or $\|c_n e^{inX}\|_{\infty, \mathbb{R}} = |c_n|$ donc ceci signifie que la série de fonctions $\sum c_n e^{inX}$ CVN sur $\mathbb{R}$. En particulier, elle converge simplement sur $\mathbb{R}$ et sa limite f est donc bien définie sur $\mathbb{R}$ (et continue par thm de continuité). f est également 2π périodique :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x+2\pi) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{in(x+2\pi)} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx} \underbrace{e^{in2\pi}}_{1}$$
$$= f(x).$$

On va montrer par récurrence sur $l \in [\![0, k]\!]$ que la propriété

$$P(l) : \text{“ } f \text{ est } C^l \text{ et } f^{(l)} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} (in)^l c_n e^{inX} \text{ ”}$$

est vraie pour tout $l \in [\![0, k]\!]$.

Initialisation : $l=0$: on vient de le faire

Hérédité Supposons $P(l)$ vraie pour un entier $l \in [\![0, k-1]\!]$ et montrons que $P(l+1)$ est vraie. Il s'agit de montrer que $f^{(l)}$ est C^1 et que

$$(f^{(l)})' = \sum_{n\in\mathbb{Z}} (in)^{l+1} c_n e^{inX}$$

Pour cela on va utiliser le thm de dérivation des séries de fonctions.

- $\sum_{TG} (in)^l c_n e^{inX}$ CVS vers $f^{(l)}$ par hypothèse de récurrence.
- $\forall n \in \mathbb{Z}$, la fonction $x \mapsto (in)^l c_n e^{inx}$ est C^1, de dérivée $x \mapsto (in)^{l+1} c_n e^{inx}$
- $\sum (in)^{l+1} c_n e^{inX}$ CVN sur $\mathbb{R}$. En effet,

$$\|(in)^{l+1} c_n e^{inX}\|_{\infty, \mathbb{R}} = |n|^{l+1} |c_n| = o\left(|n|^{l+1} |n|^{-k-1-\varepsilon}\right)$$
$$= o\left(|n|^{\underbrace{l-k-\varepsilon}_{<-1}}\right)$$

donc par Riemann et comparaison, $\sum \|(in)^{l+1} c_n e^{inX}\|_{\infty, \mathbb{R}}$ CV.

On peut donc bien appliquer le thm de dérivation, qui nous dit précisément que $P(l+1)$ est vraie, ce qui conclut la récurrence. $P(k)$ est donc vraie, donc f est C^k.