Équation aux variations
Exemple d'application

Exercice 1.— Petites oscillations du pendule. On considère l'équation :

$$(E) \quad x'' + \sin x = 0,$$

avec conditions initiales $x(0) = u$, $x'(0) = 0$, décrivant le mouvement d'un pendule lâché (à vitesse nulle) avec un écartement initial d'un angle u (par rapport à la verticale).

1. Montrer que la résolution de cette équation se ramène à celle d'une équation d'ordre 1, que l'on notera (E'). En déduire que pour tout $u \in \mathbb{R}$, (E) admet une unique solution maximale θ_u satisfaisant $\theta_u(0) = u$, $\theta'_u(0) = 0$.

2. Déterminer θ_0.

3. Montrer que pour tout $u \in \mathbb{R}$, θ_u est définie sur $\mathbb{R}$ tout entier.

On aimerait écrire que pour h petit, $\theta_h(t)$ est de la forme $hv(t) + o(h)$ $(*)$, où v est une fonction à déterminer. Pour cela, on pose

$$\Theta : \begin{cases} \mathbb{R} \times \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ (t, u) & \mapsto & \theta_u(t) \end{cases}$$

4. Justifier que Θ est de classe C^∞.

On peut alors écrire :

$$\Theta(t, h) = \Theta(t, 0) + hv(t) + h^2 w(t, h), \tag{1}$$

avec $v(t) = \frac{\partial \Theta}{\partial u}(t, 0)$ et w de classe C^∞.

5. Montrer que v est solution d'une équation linéaire homogène d'ordre 2, avec des conditions initiales à préciser. Pour cela, on pourra dériver l'expression (1) deux fois par rapport à t, et utiliser un DL en 0 de la fonction sin.

6. Déterminer v.

On aimerait maintenant affiner l'expression $(*)$. Pour cela, écrivons cette fois-ci :

$$\Theta(t, h) = \Theta(t, 0) + hv_1(t) + h^2 v_2(t) + h^3 v_3(t) + h^4 z(t, h), \tag{2}$$

avec $v_k(t) = \frac{1}{k!} \frac{\partial^k \Theta}{\partial u^k}(t, 0)$ pour $k = 1, 2, 3$, et z de classe C^∞.

7. Montrer que $\Theta(t, -h) = -\Theta(t, h)$. En déduire que v_2 est identiquement nulle.

8. Montrer que v_3 est solution d'une équation linéaire d'ordre 2 non homogène, avec des conditions initiales à préciser. En déduire v_3.