TD 4 : continuité et topologie

Exercice 1 : Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans lui-même, définie par $f(x,y) = (2x+y, 2y+x)$.

1. Justifier que pour tout vecteur $u=(x,y)$, on a $\|f(u)\|_1 \leqslant 3\|u\|_1$.
2. Montrer que f est continue en $(0,0)$, puis qu'elle est continue sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 2 : Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans lui-même, définie par $f(x,y) = (x-y, x+2y)$. Soit S la sphère unité de $\mathbb{R}^2$ pour la norme $\|\cdot\|_\infty$.

1. Justifier qu'il existe $C>0$ tel que pour tout u dans S, on ait $\|f(u)\|_\infty \leqslant C$. On pourra raisonner graphiquement pour trouver un tel C.
2. En déduire que pour tout vecteur non-nul de $\mathbb{R}^2$, on a $\|f(u)\|_\infty \leqslant C\|u\|_\infty$
3. Montrer que f est continue en $(0,0)$, puis qu'elle est continue sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 3 : On munit $\mathbb{R}^n$ d'une norme quelconque, notée $\|\cdot\|$. Soit $f:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une application linéaire. On note $(e_i)_{i=1..n}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

1. Soit $x\in\mathbb{R}^n$, un vecteur, qu'on écrit $x=\sum_{i=1}^n x_ie_i$ avec $x_i\in\mathbb{R}$. Montrer que
$$\|f(x)\| \leqslant \sum_{i=1}^n (|x_i|\cdot\|f(e_i)\|)$$
2. En déduire qu'il existe $C>0$ tel que $\|f(x)\| \leqslant C\|x\|_1$.
3. En déduire qu'il existe $C'>0$ tel que $\|f(x)\| \leqslant C'\|x\|$.
4. En déduire que f est continue pour la norme $\|\cdot\|$ choisie au départ. La continuité de f dépend-elle de la norme choisie ?

Exercice 4 : Peut-on prolonger par continuité en 0 les fonctions définies de $\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$ dans $\mathbb{R}$ par les formules suivantes.

$$f(x,y)=\frac{xy}{|x|+|y|} \qquad f(x,y)=\frac{xy}{x^2+y^2} \qquad f(x,y)=\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}$$

$$f(x,y)=\frac{1+x^2+y^2}{y}\sin(y) \qquad f(x,y)=\frac{x^2}{|y|+x^2} \qquad f(x,y)=\frac{\sin x+\sin y}{|x|+|y|}\ .$$

Exercice 5 : Soit N_1 et N_2 deux normes sur $\mathbb{R}^n$, et $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

1. Ecrire la définition de ≪ f est k-lipschitzienne pour N_1 ≫ Montrer que si f est k-lipschitzienne pour N_1, il existe k', tel que f est k'-lipschitzienne pour N_2.
2. Ecrire la définition de ≪ f est uniformément continue pour N_1 ≫. Montrer que si f est uniformément continue pour N_1, elle l'est aussi pour N_2.

Exercice 6 : Soit $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$ une fonction $K-$lipschitzienne sur $[0, 1]$ et sur $[1, 2]$. Montrer que f est $K-$lipschitzienne sur $[0, 2]$.

Exercice 7 : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction $T-$périodique et continue. Montrer que f est uniformément continue.

Exercice 8 : Soit F une partie de $\mathbb{R}^n$ et soit $f : F \to F$ une fonction continue. On appelle *point fixe* de f un point $x \in F$ tel que $f(x) = x$.

1. Soit $F = [0, 1]$, montrer que f a un point fixe.
2. Si $F = [0, 1[$, f a-t-elle forcément un point fixe ?
3. Que dire si $F = [0, 1] \cup [2, 3]$?
4. On se place dans $F = \mathbb{R}^2$, trouver un exemple de fonction sans point fixe. Idem pour F un compact de $\mathbb{R}^2$ qui est ≪ en un seul morceau ≫.

Exercice 9 : Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On suppose que f est *coercive*, c'est-à-dire que $f(x) \to +\infty$ quand $\|x\| \to +\infty$.

1. Montrer qu'un ensemble de niveau $N_\lambda = \{x \in \mathbb{R}^2, f(x) = \lambda\}$ est un compact de $\mathbb{R}^2$. Est-ce forcément une ≪ ligne ≫ de niveau ?
2. Montrer qu'un ensemble de sous-niveau $S_\lambda = \{x \in \mathbb{R}^2, f(x) \leqslant \lambda\}$ est un compact de $\mathbb{R}^2$.
3. En déduire que f est minorée et atteint son minimum.

Exercice 10 : Vrai/Faux Soit f une application continue de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$. Dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses.

1. L'image d'un fermé de $\mathbb{R}^n$ par f est fermé.
2. L'image réciproque d'un ouvert de $\mathbb{R}^m$ par f est ouverte.
3. L'image réciproque d'une boule ouverte de $\mathbb{R}^m$ est une boule ouverte de $\mathbb{R}^n$.
4. L'image réciproque d'un compact de $\mathbb{R}^m$ est un compact de $\mathbb{R}^n$.
5. L'image d'un compact de $\mathbb{R}^n$ est un compact de $\mathbb{R}^m$.
6. Soit B une partie bornée de $\mathbb{R}^n$ et $f : B \to \mathbb{R}^m$ une fonction continue sur B. Alors $f(B)$ est bornée.