Feuille 4

Exercice 4 a) $f(x,y) = \dfrac{xy}{|x|+|y|}$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ (Cette fonction est bien définie en dehors de $(0,0)$ car $(x,y) \neq (0,0) \Rightarrow |x|+|y| > 0$)

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}, \quad |f(x,y)| = \frac{|x|\cdot|y|}{|x|+|y|} = \underbrace{\frac{|x|}{|x|+|y|}}_{\leq 1} \times |y| \leq |y| \leq \|(x,y)\|_2$$

Donc $\forall \varepsilon > 0$, en posant $\eta = \varepsilon > 0$, on a : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$,

$$\|(x,y)\|_2 < \eta \Longrightarrow |f(x,y)| < \varepsilon$$

ou encore $\|(x,y) - (0,0)\|_2 < \eta \Rightarrow |f(x,y) - 0| < \varepsilon$

Donc f est prolongeable par continuité en $(0,0)$, en posant $f(0,0) = 0$

Remarque : de manière générale, si on a une fonction f définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x_0,y_0)\}$ et que l'on arrive à trouver $l \in \mathbb{R}$ tel que,

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(x_0,y_0)\}, \quad |f(x,y) - l| \leq C.\|(x,y) - (x_0,y_0)\|_2^{\alpha} \quad (*)$$

avec C et α des constantes > 0

Alors on peut prolonger f par continuité en (x_0,y_0) en posant $f(x_0,y_0) = l$.

En effet, $\forall \varepsilon > 0$, en posant $\eta = \left(\frac{\varepsilon}{C}\right)^{1/\alpha}$, on a : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(x_0,y_0)\}$,

$$\|(x,y) - (x_0,y_0)\|_2 < \eta \Rightarrow |f(x_0,y_0) - l| < \varepsilon$$

Ce qui assure la continuité de la fonction prolongée en (x_0,y_0).

On peut trouver naturellement une telle majoration $(*)$ comme dans l'exemple ci-dessus, ou on peut poser $(x-x_0, y-y_0) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ (coordonnées polaires centrées en (x_0,y_0)) et chercher une majoration de la forme $|f(x,y) - l| \leq C.r^{\alpha}$ en isolant les r et en majorant la partie où il reste des θ.

Si au contraire on obtient $f(x,y) - l =$ une expression qui ne tend pas vers 0 quand r tend vers 0 pour un θ donné, alors le prolongement par l ne sera pas continue (cf exemple ultérieur).

b) $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$

Remarque intuitive : dans l'exemple précédent, on avait un terme "d'ordre 2" en x et y au numérateur et un terme "d'ordre 1" au dénominateur, donc au voisinage de $(0,0)$ dans $\mathbb{R}^2$, le numérateur devenait négligeable par rapport au dénominateur, ce qui entraînait une limite nulle en $(0,0)$. Ce n'est pas le cas ici : numérateur et dénominateur sont du même ordre. Ceci dit il faut pousser l'étude plus loin pour démontrer l'absence de limite.

On propose deux méthodes très proches dans l'idée mais moins dans la forme.

Méthode 1

Remarque préliminaire : Si f est prolongeable par continuité en $(0,0)$ par $l \in \mathbb{R}$, alors $\forall v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ $f_v : t \longmapsto f(tv)$ doit l'être en 0 (c'est une fonction de $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ dans $\mathbb{R}$) par l également (indépendamment de v)

Attention, cette condition n'est pas suffisante. On verra un contre-exemple.

En effet si $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}, \|(x,y)\|_2 < \eta \Rightarrow |f(x,y) - l| < \varepsilon$

alors $\forall \varepsilon > 0$, en posant $\eta' = \dfrac{\eta}{\|v\|_2} > 0$, $\forall t \in \mathbb{R}\setminus\{0\}, |t| < \eta' \Rightarrow \|tv\|_2 < \eta$
$\Rightarrow |f(tv) - l| < \varepsilon$

ie $\lim\limits_{\substack{t \to 0 \\ \neq}} f(tv) = l$.

On est juste en train de dire que si une fonction f sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ se prolonge par continuité en $(0,0)$, alors c'est aussi le cas pour les restrictions de f à aux droites $\mathbb{R}v$, et leurs prolongement en $(0,0)$ doivent coïncider)

Retour à l'exercice On va trouver v_1 et $v_2 \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ tq f_{v_1} et f_{v_2} n'ont pas la même limite en 0 :

$v_1 = (0,1)$: $f(tv_1) = f(0,t) = \frac{0}{t^2} = 0 \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0$
$\neq$

$v_2 = (1,1)$: $f(t \times v_2) = f(t,t) = \frac{t^2}{2t^2} = \frac{1}{2} \underset{t\to 0}{\longrightarrow} \frac{1}{2} \neq 0$
$\neq$

Donc f n'est pas prolongeable par continuité en $(0,0)$.

<u>Méthode 2</u> (en polaires) si $(x,y) = (r\cos\theta, r\sin\theta) \neq (0,0)$

$f(x,y) = \dfrac{r^2 \cos\theta \sin\theta}{r^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta)} = \cos\theta\sin\theta$ (indépendant de r mais dépendant de θ : vaut 0 pour $\theta = 0$ et $\frac{1}{2}$ pour $\theta = \frac{\pi}{4}$)

donc f n'admet pas de limite en $(0,0)$.

<u>Justifions-le :</u> Si f était prolongeable par continuité en $(0,0)$ par $l \in \mathbb{R}$, on aurait :

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \eta > 0 \text{ tq } \|(x,y)\|_2 < \eta \Rightarrow |f(x,y) - l| < \varepsilon$$

et a fortiori tq $(\|(x,y)\|_2 < \eta$ et $\|(x',y')\|_2 < \eta) \Rightarrow |f(x,y) - f(x',y')|$
$\leq |f(x,y) - l| + |l - f(x',y')|$
$< 2\varepsilon$

("deux pts assez proches de $(0,0)$ doivent avoir des images proches")

Mais posons $\varepsilon = \frac{1}{4}$. $\forall \eta > 0$, on peut trouver (x,y) et $(x',y') \in B_{\|\cdot\|_2}((0,0), \eta)$ tq $|f(x,y) - f(x',y')| \geq 2\varepsilon = \frac{1}{2}$. Il suffit de prendre

$(x,y) = \frac{\eta}{2}(\cos 0, \sin 0)$, où f vaut 0

et $(x',y') = \frac{\eta}{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}, \sin\frac{\pi}{4}\right)$, où f vaut $\frac{1}{2}$.

f n'est donc pas prolongeable par continuité en $(0,0)$.

Cet argument se généralise bien sûr au cas où $\cos\theta\sin\theta$ est remplacé par n'importe quelle fonction qui n'a pas de limite indépendante de θ quand r tend vers 0.

c) $f(x,y)=\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}$ sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$

Même idée que pour a) (numérateur d'ordre 4 et dénominateur d'ordre 2)

$$|f(x,y)|=\underbrace{\frac{x^2}{x^2+y^2}}_{\leq 1}\cdot y^2 \leq \|(x,y)\|_2^2 \quad (*)$$

On est dans le cas de la remarque avec $C=1$ et $\alpha=2$.

Soit $\varepsilon>0$. Posons $\eta=\sqrt{\varepsilon}>0$. Alors $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$,

$$\|(x,y)\|_2<\eta \Rightarrow |f(x,y)|\leq \|(x,y)\|_2^2<\varepsilon$$

f est donc prolongeable en $(0,0)$ par 0.

<u>Rq</u> Comme vu en TD on pourrait passer en polaire et écrire :

si $(x,y)=(r\cos\theta, r\sin\theta)$, $|f(x,y)|=\left|\dfrac{r^4\cos^2\theta\sin^2\theta}{r^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)}\right|=\left|r^2\cos^2\theta\sin^2\theta\right|\leq \underset{\|(x,y)\|_2^2}{\overset{\shortparallel}{r^2}}$ $(**)$

et on a envie d'écrire $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} r^2=0$ mais il semble que $\lim\limits_{(x,y)\to(\,,\,)}[\ldots]$ n'ait pas été défini en cours donc autant éviter et revenir à la définition comme ci-dessus. En tout cas la majoration $(**)$ obtenue grâce aux coordonnées polaires est la même que $(*)$.

d) $f(x,y)=\dfrac{1+x^2+y^2}{y}\sin y$ sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*$ (erreur dans l'énoncé, cette fonction n'est pas définie sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$)

Il s'agit ici de savoir si l'on peut prolonger f par continuité en une infinité de points !

Commençons par remarquer (et il faut le faire à chaque fois qu'on peut !) qu'on peut écrire $f(x,y)=g(x,y)\times h(x,y)$ avec

$$g:\ \begin{aligned}\mathbb{R}^2&\to\mathbb{R}\\(x,y)&\mapsto 1+x^2+y^2\end{aligned} \quad\text{et}\quad h:\ \begin{aligned}\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*&\to\mathbb{R}\\(x,y)&\mapsto \frac{\sin y}{y}\end{aligned}$$

La première est polymomiale donc continue en tout point de $\mathbb{R}^2$.
(pour le redémontrer à la main, cf ci-après). Il suffit donc de vérifier que h se prolonge en une fonction $\tilde{h}$ continue sur $\mathbb{R}^2$ et le prolongement $g\times\tilde{h}$ de f à $\mathbb{R}^2$ sera alors continu comme produit de fonctions continues.

Lemme : $k : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $y \mapsto \frac{\sin y}{y}$ se prolonge par continuité par 1 en 0
(on utilise pour cela un DL à l'ordre 2 de sin en 0)

Corollaire : $h : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto \frac{\sin y}{y}$ se prolonge par continuité à $\mathbb{R}\times\{0\}$ par 1,

ie : la fonction $\tilde{h} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto \begin{cases} h(x,y) & \text{si } y\neq 0 \\ 1 & \text{si } y=0 \end{cases}$ est C^0 sur $\mathbb{R}^2$.

Preuve. • C'est la composée de $\begin{array}{c}\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto y\end{array}$ et du prolongement $\tilde{k} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de k, qui sont toutes deux continues sur leur ensemble de définition donc la composée est continue.

• ou à la main : $\tilde{k}$ est continue en 0 donc

$$\forall \varepsilon>0,\ \exists \eta>0,\ \forall y\in\mathbb{R}^*,\ |y|<\eta \Rightarrow |k(y)-1|<\varepsilon$$

Mais alors $\forall x_0\in\mathbb{R}$,

$\forall \varepsilon>0$, en prenant le η ci-dessus, $\forall (x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*$,

$$\|(x,y)-(x_0,0)\|_2<\eta \Rightarrow |y-0|<\eta \Rightarrow |\underbrace{\tilde{h}(x,y)}_{=k(y)\text{ ou }1} - \underbrace{\tilde{h}(x_0,0)}_{=1}|<\varepsilon$$

Donc $\tilde{h}$ est continue en $(x_0,0)$, $\forall x_0\in\mathbb{R}$.

Ceci conclut le prolongement par continuité de f.

Avec les limites, on aurait pu raccourcir les choses en disant que :

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,0)} 1+x^2+y^2 = 1+x_0^2 \text{ (à justifier) et } \lim_{(x,y)\to(x_0,0)} \frac{\sin y}{y} = \lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y} = 1$$

cf justification ci-dessus

donc $\lim_{(x,y)\to(x_0,0)} f(x,y)$ existe et vaut $1+x_0^2$, donc f est prolongeable par continuité.

Preuve de la continuité de $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
$(x,y) \mapsto 1+x^2+y^2$

Il s'agit de montrer que $\forall (x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$,

$$\forall \varepsilon>0,\ \exists \eta>0,\ \forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ \|(x,y)-(x_0,y_0)\|_2<\eta \Rightarrow |g(x,y)-g(x_0,y_0)|<\varepsilon$$

Mais
$$|g(x,y)-g(x_0,y_0)| = \left| \|(x,y)\|_2^2 - \|(x_0,y_0)\|_2^2 \right|$$

$$= \left| \|(x,y)\|-\|(x_0,y_0)\| \right| \times \left| \|(x,y)\|+\|(x_0,y_0)\| \right|$$

inégalité triangulaire (2 fois)

$$\leqslant \|(x,y)-(x_0,y_0)\| \left(2\underbrace{\|(x_0,y_0)\|}_{r_0} + \|(x,y)-(x_0,y_0)\| \right) \quad (*)$$

Étant donné $\varepsilon>0$, posons $\eta = \min\left(\frac{\varepsilon}{3r_0+1}, r_0+1\right) > 0$ (à chercher au brouillon)

Alors $\|(x,y)-(x_0,y_0)\|<\eta \Rightarrow (*) < \frac{\varepsilon}{3r_0+1} \times (3r_0+1) = \varepsilon$, ce qu'on voulait. □

e) $f(x,y) = \dfrac{x^2}{|y|+x^2}$ Un bon réflexe à avoir (qui est un cas particulier de la méthode 1 employée en b)) est de regarder ce qui se passe sur les axes de coordonnées :

$\forall y\neq 0,\ f(0,y) = 0 \xrightarrow[y\to 0]{} 0$
$\forall x\neq 0,\ f(x,0) = 1 \xrightarrow[x\to 0]{} 1$

$0\neq 1$ donc f n'admet pas de limite en $(0,0)$

(avec les notations de b), nous venons de montrer que pour $v_1=(0,1)$ et $v_2=(1,0)$, f_{v_1} et f_{v_2} n'ont pas la même limite en 0)

f) $f(x,y) = \dfrac{\sin x + \sin y}{|x|+|y|}$ On remarque que $f(x,0) = \dfrac{\sin x}{|x|}$, qui n'admet pas de limite qd $x\to 0$

$\left(\lim_{x\to 0^+} f(x,0) = 1 \neq -1 = \lim_{x\to 0^-} f(x,0)\right)$

A fortiori f n'admet pas de limite en $(0,0)$.

g) Un exemple supplémentaire pour tester la méthode polaire sur un exemple un peu plus compliqué que a) :

$$f(x,y) = \frac{x^2 y^3}{3x^4 + 8y^2}$$ (bien défini sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Pourquoi?)

si $(x,y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$,

$$|f(x,y)| = \left| \frac{r^2\cos^2\theta \; r^3 \sin^3\theta}{3r^4\cos^4\theta + 8r^2\sin^2\theta} \right|$$

si $\|(x,y)\|_2 < 1$, i.e. $r < 1$, $r^4 \leq r^2$ donc $0 < 3r^4\cos^4\theta + 8r^4\sin^2\theta \leq 3r^4\cos^4\theta + 8r^2\sin^2\theta$

et donc

$$|f(x,y)| \leq \frac{r^5 |\cos^2\theta \sin^3\theta|}{r^4 |3\cos^4\theta + 8\sin^2\theta|}$$ (on se ramène à une seule puissance au dénominateur)

$$\leq r\, g(\theta)$$

avec $g : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\theta \longmapsto \frac{|\cos^2\theta \sin^3\theta|}{|3\cos^4\theta + 8\sin^2\theta|}$$

(bien définie car cos et sin ne s'annulent pas simultanément)

g est continue (comme composée d'applications usuelles continues) sur le compact $[0, 2\pi]$ donc majorée par une constante $C > 0$

On a donc montré que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, si $\underline{\|(x,y)\| < 1}$ $|f(x,y)| \leq C \|(x,y)\|$

A partir de là on raisonne comme dans a).