TD LM250

Feuille 4.

Exercice 1 1. Soit $x \in \mathbb{R}$.

- Si $x \notin \pi\mathbb{Z}$, $|\cos x| < 1$ donc $|f_n(x)| = (n+1)|\cos x|^n |\sin x| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ par croissances comparées.
- Si $x \in \pi\mathbb{Z}$, $\sin x = 0$ donc $f_n(x) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$

Finalement, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$. La limite simple de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc la fonction nulle sur $\mathbb{R}$.

2. • $\int_0^{\pi/2} f(t)\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 0\,dt = 0$

• $\forall n \in \mathbb{N}$, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(t)\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (n+1)\cos^n(t)\sin(t)\,dt = \left[-\cos^{n+1}(t)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$

Donc $\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(t)\,dt = 1 \neq 0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)\,dt$.

3. Il s'agit de montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, la série numérique $\sum_{TG} f_n(x)$ converge. Si $x \in \pi\mathbb{Z}$ c'est clair, puisque $f_n(x) = 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Soit $x \in \mathbb{R}\setminus\pi\mathbb{Z}$. $|f_n(x)| = (n+1)|\cos x|^n |\sin x| = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ par croissances comparées, donc par principe de comparaison (les suites comparées étant positives), comme $\sum_{TG} \frac{1}{n^2}$ cv par Riemann, $\sum_{TG} |f_n(x)|$ cv aussi, ie $\sum_{TG} f_n(x)$ cv absolument, et a fortiori converge.

$\sum_{TG} f_n$ converge donc simplement.

4. Pour que $\sum_{TG} f_n$ converge <u>normalement</u>, il <u>faut</u> en particulier que $\|f_n\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x)|$ tende vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

Or $f_n\left(\frac{1}{n}\right) = (n+1)\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n \sin\frac{1}{n}$ et $(n+1)\sin\frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n+1}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} 1$

donc $f_n\left(\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \exp\left(n\ln\left(\cos\frac{1}{n}\right)\right)$.

Or $\exp\left(n\ln\left(\cos\frac{1}{n}\right)\right) = \exp\left(n\ln\left(1-\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right)$

$$= \exp\left(n\left(-\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right)$$

$$= \exp\Big(\underbrace{-\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)}_{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0}\Big)$$

Donc $\exp\left(n\ln\left(\cos\frac{1}{n}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$, et finalement $\left(f_n\left(\frac{1}{n}\right)\right)_{n\geq 1}$ tend vers 1 en $+\infty$.

En particulier, il existe $N\in\mathbb{N}$ tq $\forall n\geq N$, $f_n\left(\frac{1}{n}\right)\geq\frac{1}{2}$, et donc a fortiori $\|f_n\|_\infty \geq \frac{1}{2}$. En particulier, $\|f_n\|_\infty$ ne tend pas vers 0 donc $\sum f_n$ ne converge pas normalement.

5. $\forall x\in\left]\varepsilon,\frac{\pi}{2}\right]$, $|f_n(x)| = (n+1)|\cos x|^n \underbrace{|\sin(x)|}_{\leq 1} \leq (n+1)(\cos\varepsilon)^n$

($|\cos|$ est décroissante sur $\left]\varepsilon,\frac{\pi}{2}\right]$)

Or $\sum_{TG}(n+1)(\cos\varepsilon)^n$ CV (déjà vu : $(n+1)(\cos\varepsilon)^n = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ + Riemann + comparaison)

donc $\sum_{TG} f_n$ <u>converge normalement</u> sur $\left]\varepsilon,\frac{\pi}{2}\right]$.

Les fonctions f_n étant <u>toutes continues</u> sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right]$ (comme produit de fonctions continues), le théorème de continuité entraîne que $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue sur $\left]\varepsilon,\frac{\pi}{2}\right]$. Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right]$, $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue au voisinage de tout point de $\left]0,\frac{\pi}{2}\right]$ donc <u>sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right]$ tout entier</u>.

6. Notons $F = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$.

Il suffit de trouver une suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tendant vers 0 mais telle que $\left(F(x_k)\right)_{k\in\mathbb{N}}$ ne tende pas vers $F(0) = \sum_{n=0}^{+\infty} 0 = 0$.

Prenons $x_k = \frac{1}{k}$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

$$F(x_k) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n\left(\frac{1}{k}\right) \overset{(*)}{\geqslant} f_k\left(\frac{1}{k}\right) \geqslant 0$$ car pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$f_n\left(\frac{1}{k}\right) = (n+1)\cos\left(\frac{1}{k}\right)^n \sin\left(\frac{1}{k}\right) \underline{\underline{\geqslant 0}}.$$

Or on a vu que $\lim_{k\to+\infty} f_k\left(\frac{1}{k}\right) = 1$ donc on ne peut avoir $\lim_{k\to+\infty} F(x_k) = 0$ (sinon les inégalités $(*)$ et le théorème des gendarmes entraîneraient $\lim_{k\to+\infty} f_k\left(\frac{1}{k}\right) = 0$).

F n'est donc pas continue en 0.