Equations différentielles linéaires (II)
(Correction)

Exercice 5 (2e matrice)

- On commence par déterminer les valeurs propres de A : elles sont complexes conjuguées (distinctes) : $\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$

- On détermine un vecteur propre associé à la valeur propre $\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$: $v = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$

Méthode 1 On pose $v_1 = \mathrm{Re}(v) = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ et $v_2 = \mathrm{Im}\, v = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$. Pour alléger les formules, notons $\alpha = \frac{1}{2}$ et $\beta = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Soit P la matrice de passage de la base canonique à la base (v_1, v_2) :

$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$. Alors $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha & +\beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} =: B$

D'après le cours, la solution de l'équation $X' = AX$ satisfaisant $X(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est
$$X : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad t \longmapsto e^{(t-1)A} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$
Calculons les coordonnées de $X(t)$:

$$X(t) = e^{(t-1)A} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \exp\left(P(1-t)BP^{-1}\right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$= P \exp((1-t)B)\, P^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$= P \cdot e^{\alpha(t-1)} \begin{pmatrix} \cos(1-t)\beta & \sin(1-t)\beta \\ -\sin(1-t)\beta & \cos(1-t)\beta \end{pmatrix} P^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$ donc $P^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$.

Après calcul, on trouve : $X(t) = e^{\frac{(t-1)}{2}} \begin{pmatrix} \cos\frac{(t-1)\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt{3}} \sin\frac{(t-1)\sqrt{3}}{2} \\ \frac{2}{\sqrt{3}} \sin\frac{(t-1)\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$.

Méthode 2 v est un vecteur propre (complexe) associé à la valeur propre $\alpha+i\beta =: \lambda$

donc la solution complexe valant v en $t=1$ est $Z : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}^2$
$t \longmapsto e^{(t-1)\lambda} \cdot v$

Posons $X_1 : t \longmapsto Re(Z(t))$

$X_2 : t \longmapsto Im(Z(t))$

X_1 et X_2 sont des solutions réelles de l'équation $X' = AX$.

(En effet $\boxed{X_1'(t) =} (Re(Z))'(t) = Re(Z'(t)) = Re(A.Z(t)) = A. Re Z(t) = \boxed{AX_1(t)}$)
car A réelle

Posons :

$v_1 = Re(v) = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$, $v_2 = Im v = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$. Ces vecteurs forment une base de $\mathbb{R}^2$.

Donc comme $X_1(1) = v_1$ et $X_2(1) = v_2$, X_1 et X_2 forment une base de l'espace des solutions de l'ED. ("$Eval_1$ est un isomorphisme d'e.v").

Si X désigne la solution recherchée (valant $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ en $t=1$), il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $X = aX_1 + bX_2$

En particulier $X(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = a X_1(1) + b X_2(1) = a v_1 + b v_2$

Ceci entraîne $a = 1$ et $b = -\frac{1}{\sqrt{3}}$, et finalement,

$$X(t) = 1 \times X_1(t) - \frac{1}{\sqrt{3}} X_2(t) = Re\left(e^{\lambda(t-1)} v\right) - \frac{1}{\sqrt{3}} Im\left(e^{\lambda(t-1)} v\right)$$

$$= e^{\alpha(t-1)} \left(Re \begin{pmatrix} e^{i\beta(t-1)} \\ e^{i\beta(t-1)}\left(-\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right) \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{3}} Im \begin{pmatrix} e^{i\beta(t-1)} \\ e^{i\beta(t-1)}\left(-\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right) \end{pmatrix} \right)$$

$$= \dots = e^{\alpha(t-1)} \begin{pmatrix} \cos((t-1)\beta) - \frac{1}{\sqrt{3}} \sin((t-1)\beta) \\ \frac{2}{\sqrt{3}} \sin((t-1)\beta) \end{pmatrix}$$

Exercice 6 $(E) : \begin{cases} x' = y \\ y' = 2x - y + e^t \end{cases}$. Sous forme matricielle : $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ e^t \end{pmatrix}$

de la forme : $X' = AX + B(t)$ avec $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ et $B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ e^t \end{pmatrix}$.

Exercice 6 (suite)

Etape 1 On cherche une base de solutions de l'équation homogène (E_0) $X' = AX$.

On a vu dans l'exo précédent que A a deux valeurs propres réelles distinctes 1 et -2, et que $E_1 = \ker(A - I) = \mathbb{R}\underbrace{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}}_{v_1}$ et $E_2 = \ker(A+2I) = \mathbb{R}\underbrace{\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}}_{v_2}$

(Cours) (v_1, v_2) est une base de $\mathbb{R}^2$ donc les solutions X_1, X_2 de l'équation (E_0) valant respectivement v_1 et v_2 en $t=0$ forment une base de l'espace des solutions. De plus (cours) ces solutions sont $X_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto e^t \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

et $X_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto e^{-2t}\begin{pmatrix}-1\\+2\end{pmatrix}$

Posons, pour tout $t \in \mathbb{R}$,
$$M(t) = \begin{array}{cc} X_1(t) & X_2(t) \\ \downarrow & \downarrow \end{array} \begin{pmatrix} e^t & -e^{-2t} \\ e^t & 2e^{-2t} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{array}{cc} v_1 & v_2 \\ \downarrow & \downarrow \end{array}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}_{=:P} \cdot \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{pmatrix}.$$

Comme $X_1' = AX_1$ et $X_2' = AX_2$, $M' = AM$.

Etape 2 On cherche la solution X de (E) valant $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ en $t=0$ sous la forme
$X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto M(t).C(t)$, avec $C : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto \begin{pmatrix}C_1(t)\\C_2(t)\end{pmatrix}$ dérivable.

X solution de $(E) \iff X'(t) = AX(t) + B(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$

$$\iff \underbrace{\underbrace{M'(t)}_{AM(t)}C(t)}_{AX(t)} + M(t)C'(t) = AX(t) + B(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

$$\iff M(t)\,C'(t) = B(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

$$\iff C'(t) = (M(t))^{-1} B(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

$$\iff C'(t) = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{pmatrix}^{-1} \cdot P^{-1}\begin{pmatrix}0\\e^t\end{pmatrix} \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

$$= \underbrace{e^t \times \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{3t} \end{pmatrix}} \underbrace{P^{-1}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\ \frac{1}{3}\end{pmatrix}}$$

$$\iff \forall t \in \mathbb{R} \quad \begin{cases} C_1'(t) = \frac{1}{3} \\ C_2'(t) = \frac{e^{3t}}{3} \end{cases}$$

Donc X solution de (E) et $X(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1'(t) = \frac{1}{3} \\ c_2'(t) = \frac{e^{3t}}{3} \end{cases} (\forall t \in \mathbb{R})$ et $X(0) = M(0) \cdot C(0)$

$$= P\begin{pmatrix} c_1(0) \\ c_2(0) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Leftrightarrow \quad \forall t \in \mathbb{R}, \begin{cases} c_1'(t) = \frac{1}{3} \\ c_2'(t) = \frac{e^{3t}}{3} \end{cases}$ et $\begin{cases} c_1(0) = 0 \\ c_2(0) = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \quad \forall t \in \mathbb{R} \begin{cases} c_1(t) = \frac{t}{3} \\ c_2(t) = \frac{e^{3t}}{9} - \frac{1}{9} \end{cases}$

Donc finalement, la solution X de (E) satisfaisant $X(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ est

$$X : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$t \longmapsto \begin{pmatrix} e^t & -e^{-2t} \\ e^t & 2e^{-2t} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{t}{3} \\ \frac{e^{3t}}{9} - \frac{1}{9} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{te^t}{3} - \frac{e^t}{9} + \frac{e^{-2t}}{9} \\ \frac{te^t}{3} + \frac{2e^t}{9} - \frac{2e^{-2t}}{9} \end{pmatrix}$$