TD 3 : topologie de $\mathbb{R}^n$

Exercice 1 : Convergence de suites

1. Représenter les suites suivantes dans $\mathbb{R}^2$. Lesquelles sont convergentes ?

$$\left(\frac{1}{n}, 1\right) \qquad \left(e^{-n}, e^{-n}\right) \qquad \left(1/n^2, 1/n\right) \qquad \left(e^{n}, e^{-n}\right)$$

$$(2n, -5n) \qquad (n\cos(n\pi/4), n\sin(n\pi/4)) \qquad \left(1 + \frac{(-1)^n}{n}, \sin(n\frac{\pi}{2})\right)$$

2. La suite suivante converge-t-elle ?

$$U_0 \text{ quelconque et } U_{n+1} = AU_n, \text{ avec } A = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}.$$

Si oui, soit ℓ sa limite. Donner une majoration simple de $N(U_n - \ell)$ en fonction de n, en prenant pour N successivement les normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$.

Exercice 2 : Exemple de changement de norme

On munit $\mathbb{R}^2$ de la norme euclidienne $\|\cdot\|_2$. Soit U un ensemble ouvert pour cette norme. Justifier qu'il est également ouvert pour la norme $\|\cdot\|_1$. Faire un dessin. Même question avec un fermé, puis un compact.

Exercice 3 : Exemples d'ouverts et de fermés

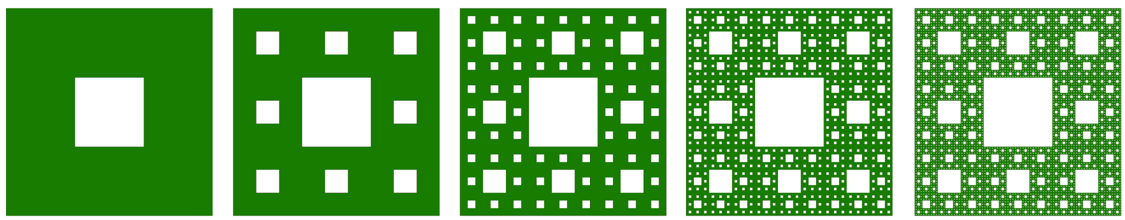
Parmi les ensembles suivants, lesquels sont ouverts, fermés, compacts ?

1. Le singleton $\{v\}$, où v est un vecteur de $\mathbb{R}^2$. Et dans $\mathbb{R}^n$?
2. L'ensemble $\{v_1, \cdots v_k\}$, où les v_j sont des vecteurs de $\mathbb{R}^2$. Et dans $\mathbb{R}^n$?
3. La boule unité $B_N(0,1)$ ouverte, où N est une norme sur $\mathbb{R}^2$. Même question avec la boule unité fermée.
4. L'ensemble $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, y \geqslant x^2\}$.
5. L'ensemble $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, 0 < y < x^2\}$.
6. L'ensemble $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, -2 < y \leqslant x^2\}$.
7. L'ensemble de points $\{1/2^n, n \in \mathbb{N}\}$ dans $\mathbb{R}$.
8. L'ensemble de points $\{2^n, n \in \mathbb{N}\}$ dans $\mathbb{R}$.
9. Les rationnels $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$.

Exercice 4 : La question de l'espace ambiant $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^2$

On considère F un fermé de $\mathbb{R}$. On le plonge canoniquement dans $\mathbb{R}^2$ en considérant $\tilde{F} = F \times \{0\}$. Montrer que $\tilde{F}$ est un fermé de $\mathbb{R}^2$. Que se passe-t-il si F est un ouvert de $\mathbb{R}$?

Exercice 5 : Le tapis de Sierpinsky
On considère le carré fermé $[0,1]^2$ dans $\mathbb{R}^2$. On lui retire le carré ouvert $]1/3, 2/3[^2$, puis pour chaque carrés restant, on lui retire le carré ouvert central et on continue à itérer l'opération à l'infini. On obtient un tapis de Sierpinsky qui est un ensemble fractal. Cet ensemble est-il ouvert ? Fermé ? Compact ?



Exercice 6 : Une figure complexe
On considère l'ensemble

$$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ , \ |x+y| \le 2 \ , \ |x-y| > 1 \text{ et } ||y|-3| \le 1\} \ .$$

Représenter cet ensemble et dire s'il est ouvert ou fermé.

Exercice 7 : Vrai/Faux
Dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses

1. Si $(u_n) \subset \mathbb{R}^2$ est une suite non bornée, alors $\|u_n\| \to +\infty$ pour toute norme de $\mathbb{R}^2$.
2. Soit $(x_n, y_n) \subset \mathbb{R}^2$ telle que $\|(x_n, y_n)\| \to +\infty$ alors $|x_n| \to +\infty$ ou $|y_n| \to +\infty$.
3. Si un ensemble n'est pas ouvert, alors il est fermé.
4. Un ensemble peut être ouvert et fermé en même temps.
5. Le complémentaire d'un ouvert est un fermé.
6. L'intersection quelconque d'ouverts est un ouvert.
7. L'intersection quelconque de fermés est un fermé.
8. Une union finie de compacts est un compact.
9. Un ouvert de $\mathbb{R}$ contient forcément un intervalle fermé $[a, b]$ avec $b > a$.
10. Si F et F' sont deux fermés de $\mathbb{R}^2$, la somme

$$F + F' = \{v \in \mathbb{R}^2 \ , \quad v = f + f' \text{ avec } f \in F \ , \quad f' \in F'\}$$

est un fermé de $\mathbb{R}^2$.