TD LM250

Feuille 3

Exercice 4 1. $\dfrac{(-1)^n}{n^\alpha+(-1)^n} = \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}\underbrace{\left(\dfrac{1}{1+\frac{(-1)^n}{n^\alpha}}\right)}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} 1}$ (On suppose $\alpha>0$ dans cet exercice)

Donc $\dfrac{(-1)^n}{n^\alpha+(-1)^n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}$

Mais cela ne va pas nous permettre de conclure car les théorèmes de comparaison ne s'appliquent qu'à des suites de signe constant. Il faut donc pousser plus loin le développement.

$$\frac{1}{1+\frac{(-1)^n}{n^\alpha}} = 1 - \frac{(-1)^n}{n^\alpha} + o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right), \text{ donc } \frac{(-1)^n}{n^\alpha+(-1)^n} = \frac{(-1)^n}{n^\alpha}\left(1-\frac{(-1)^n}{n^\alpha}+o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)\right)$$

$$= \frac{(-1)^n}{n^\alpha} - \frac{1}{n^{2\alpha}} + o\left(\frac{1}{n^{2\alpha}}\right)$$

Ainsi, si l'on pose $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}$ et $v_n = \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha+(-1)^n} - \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}$

On a : $\dfrac{(-1)^n}{n^\alpha+(-1)^n} = u_n + v_n$ et $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{n^{2\alpha}}$

- $\sum_{TG} u_n$ CV d'après le TSSA, car $\left(\dfrac{1}{n^\alpha}\right)_{n\geq 1}$ est décroissante et tend vers 0.
- $\sum_{TG} v_n$ CV si et seulement si $\sum_{TG} -\dfrac{1}{n^{2\alpha}}$ CV par principe de comparaison de séries de terme général de signe constant, et $\sum_{TG} \dfrac{-1}{n^{2\alpha}}$ CV ssi $2\alpha>1$ par critère de Riemann, ie ssi $\alpha > \dfrac{1}{2}$

Or, comme $\sum_{TG} u_n$ CV, et $\dfrac{(-1)^n}{n^\alpha+(-1)^n} = u_n+v_n$, $\sum_{TG}\dfrac{(-1)^n}{n^\alpha+(-1)^n}$ CV ssi $\sum_{TG} v_n$ CV.

Finalement, $\boxed{\sum_{TG} \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha+(-1)^n} \text{ CV ssi } \alpha > \dfrac{1}{2}}$

2. Vu en TD. $\sum_{TG} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+n}}$ CV par TSSA.

3. $$\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+n}}\right) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right) \quad (*)$$

car $\ln(1+u) = u + \underset{1}{o}(u)$ et $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Donc $\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+n}}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{(-1)^n}{n}$ car $\sqrt{n^2+n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{n^2} = n$.

Mais $\sum_{TG} \frac{(-1)^n}{n}$ est convergente sans être absolument convergente donc une fois encore le critère de comparaison, qui ne s'applique qu'à des termes généraux de signe constant, ne va pas nous permettre de conclure, et il nous faut pousser plus loin le développement $(*)$:

$$\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+n}}\right) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+n}} - \frac{1}{2(n^2+n)} + o\left(\frac{1}{n^2+n}\right)$$

$$\left(\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + o(u^2)\right)$$

Posons $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+n}}$, et $v_n = \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+n}}\right) - \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+n}}$

Alors • $\sum_{TG} u_n$ CV d'après 2.

• $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{2(n^2+n)} \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{2n^2}$. Or $\sum_{TG} \frac{-1}{2n^2}$ CV par critère de Riemann donc par principe de comparaison $\left(\left(-\frac{1}{2n^2}\right)_{n\geq 1}\right.$ étant de signe constant$\left.\right)$, $\sum_{TG} v_n$ CV

Finalement, $\sum_{TG} \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+n}}\right)$ est la somme de deux séries convergente, donc est elle-même convergente.

4. $$\left(\frac{n}{n+1}\right)^{\frac{1}{n}}-1=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-\frac{1}{n}}-1$$
$$=\exp\left(-\frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)-1$$
$$=\exp\left(-\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right)-1$$
$$=\exp\left(-\frac{1}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)-1 \quad = -\frac{1}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{n^2}$$

car $e^h-1 \underset{h\to 0}{=} h+o(h)$.

Or $\sum_{TG} -\frac{1}{n^2}$ CV par Riemann et $\left(\frac{-1}{n^2}\right)_{n\geq 1}$ est de signe constant

donc par principe de comparaison, $\sum_{TG}\left[\left(\frac{n}{n+1}\right)^{1/n}-1\right]$ CV également.

5. f est supposée C^2 au voisinage de a, c'est-à-dire sur un intervalle de la forme $[a-h_0, a+h_0]$, avec $h_0>0$. En particulier, f est deux fois dérivable sur cet intervalle et f'' est continue sur le segment $[a-h_0,a+h_0]$ donc bornée sur ce segment : il existe $M>0$ tq $\forall x\in[a-h_0,a+h_0], |f''(x)|\leq M$.
Alors pour tout n tel que $a+\frac{1}{n}$ et $a-\frac{1}{n}\in[a-h_0,a+h_0]$ (ie pour tout $n\geq\frac{1}{h_0}$), l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 2 donne :

$$\left|f(a+\tfrac{1}{n})-f(a)-\tfrac{1}{n}f'(a)\right|\leq\frac{M}{2n^2} \quad\text{et}\quad \left|f(a-\tfrac{1}{n})-f(a)+\tfrac{1}{n}f'(a)\right|\leq\frac{M}{2n^2}$$

(Plus généralement, $|f(a+h)-f(a)-hf'(a)|\leq M\frac{h^2}{2}$

Donc $$-\frac{M}{n^2}\leq\left(f(a+\tfrac{1}{n})-f(a)-\tfrac{1}{n}f'(a)\right)+\left(f(a-\tfrac{1}{n})-f(a)+\tfrac{1}{n}f'(a)\right)\leq\frac{M}{n^2}$$

ie : $$\left|f(a+\tfrac{1}{n})+f(a-\tfrac{1}{n})-2f(a)\right|\leq\frac{M}{n^2}$$

Autrement dit, $\left|f(a+\frac{1}{n})+f(a-\frac{1}{n})-2f(a)\right|=O\left(\frac{1}{n^2}\right)$
Or $\sum_{TG}\frac{1}{n^2}$ cv par Riemann donc par comparaison (les TG sont positifs), $\sum_{TG}\left|f(a+\frac{1}{n})+f(a-\frac{1}{n})-2f(a)\right|$ CV. Autrement dit $\sum_{TG}\left(f(a+\frac{1}{n})+f(a-\frac{1}{n})-2f(a)\right)$ est absolument convergente donc en particulier convergente.

6. cf. page web de Maxime Zavidovique

7. $$\frac{e^{in\theta}}{\sqrt{n}+e^{in\varphi}} = \frac{e^{in\theta}}{\sqrt{n}}\left(\frac{1}{1+\frac{e^{in\varphi}}{\sqrt{n}}}\right)$$

$$= \frac{e^{in\theta}}{\sqrt{n}}\left(1 - \frac{e^{in\varphi}}{\sqrt{n}} + \frac{e^{2in\varphi}}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

$$= \underbrace{\frac{e^{in\theta}}{\sqrt{n}}}_{u_n} - \underbrace{\frac{e^{in(\varphi+\theta)}}{n}}_{v_n} + \underbrace{\frac{e^{in(2\varphi+\theta)}}{n^{3/2}} + o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)}_{w_n}$$

- $w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{e^{in(2\varphi+\theta)}}{n^{3/2}}$ donc $|w_n| \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\overbrace{|e^{in(2\varphi-\theta)}|}^{=1}}{n^{3/2}}$

Or $\sum_{TG} \frac{1}{n^{3/2}}$ cv par Riemann donc par principe de comparaison $\sum_{TG} |w_n|$ cv, ie $\sum_{TG} w_n$ converge absolument, donc converge.

- Etude de $\sum_{TG} u_n$.

  - Si $\theta \in 2\pi\mathbb{Z}$, $u_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ donc $\sum_{TG} u_n$ DV par Riemann

  - Si $\theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$, $e^{i\theta} \neq 1$ et $\left|\sum_{k=0}^{n} e^{ik\theta}\right| = \left|\sum_{k=0}^{n} (e^{i\theta})^k\right| = \left|\frac{1-e^{i(n+1)\theta}}{1-e^{i\theta}}\right| \leq \frac{2}{|1-e^{i\theta}|}$

Ainsi la suite $\left(\sum_{k=0}^{n} e^{ik\theta}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

En outre $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)_{n\geq 1}$ est décroissante et tend vers 0, donc d'après le critère d'Abel, $\sum_{TG} \frac{e^{in\theta}}{\sqrt{n}}$ CV.

- Etude de $\sum_{TG} v_n$. ~~De~~ De la même façon, $\sum_{TG} v_n$ CV ssi $\theta+\varphi \notin 2\pi\mathbb{Z}$

<u>Bilan</u> • si $\theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$ et $\theta+\varphi \notin 2\pi\mathbb{Z}$, $\sum_{TG} \frac{e^{in\theta}}{\sqrt{n}+e^{in\varphi}}$ est la somme de trois séries convergentes, donc est convergente.

- Si $\theta \in 2\pi\mathbb{Z}$ et $\theta+\varphi \notin 2\pi\mathbb{Z}$ <u>ou</u> $\theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$ et $\theta+\varphi \in 2\pi\mathbb{Z}$, $\sum_{TG} \frac{e^{in\theta}}{\sqrt{n}+e^{in\varphi}}$ est la somme de deux séries CV et d'une série DV donc <u>elle diverge</u>.

- Si $\theta \in 2\pi\mathbb{Z}$ (et quelque soit φ)

$$\frac{e^{in\theta}}{\sqrt{n}+e^{in\varphi}} = \frac{1}{\sqrt{n}+e^{in\varphi}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{n}}$$ et on peut cette fois appliquer le critère de comparaison, $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)_{n\geq 1}$ étant de signe constant. D'après Riemann, $\sum_{TG} \frac{1}{\sqrt{n}}$ DV, donc $\sum_{TG} \frac{e^{in\theta}}{\sqrt{n}+e^{in\varphi}}$ DV.