

TD 1 : Sous-ensembles du plan.

Exercice 1 : Pour chacune des fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R} suivantes, décrire les ensembles $f^{-1}([0, 1[)$ et $f^{-1}([-1, 2])$.

$$\begin{aligned} f_1 &: x \in \mathbb{R} \mapsto x^2, \\ f_2 &: x \in \mathbb{R} \mapsto x, \\ f_3 &: x \in \mathbb{R} \mapsto \sin(x). \end{aligned}$$

Exercice 2 : Soit $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$, l'application définie par $f(x, y) = x + y$.

1. Décrire les ensembles suivants géométriquement et les représenter sur un dessin.

$$f^{-1}(\{1\}), f^{-1}([0, 1]), f^{-1}([0, 1[), f^{-1}(\mathbb{R}_+).$$

2. On appelle *ligne de niveau* λ de f l'ensemble

$$L_\lambda(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = \lambda\}.$$

Quelle est la nature géométrique des ligne de niveaux de f ? Décrire les ensembles ci-dessus comme des réunions de lignes de niveaux.

Exercice 3 : Décrire les lignes de niveaux λ des fonctions suivantes, en fonction de la valeur de $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$f_1(x, y) = x^2 + y^2, f_2(x, y) = y - x^2, f_3(x, y) = \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4}.$$

Exercice 4 : Décrire les ensembles suivants comme des unions et intersections d'images réciproques de sous-ensembles de \mathbb{R} par des fonctions $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ que l'on précisera.

$$\begin{aligned} E_1 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y \geq x^2\}, \\ E_2 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, -1 \leq x + 2y \leq 1 \text{ et } y \geq x^2 - 1\}, \\ E_3 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 < 1 \text{ ou } x^2 + y^2 \geq 4\}. \end{aligned}$$

Exercice 5 : Soient A et B deux points du plan \mathbb{R}^2 , de coordonnées (x_A, y_A) et (x_B, y_B) .

1. Donner une équation cartésienne de la droite (AB) .
2. Donner une équation paramétrique de la droite (AB) .
3. Que représente géométriquement l'ensemble $\{(1 - t) \cdot A + t \cdot B, t \in [0, 1]\}$?

Exercice 6 : On se place dans le plan \mathbb{R}^2 .

1. Etant donnés deux points M et N de coordonnées respectives (x_M, y_M) et (x_N, y_N) , rappeler l'expression de la distance de M à N .
2. On dit qu'un sous-ensemble E de \mathbb{R}^2 est borné s'il existe un réel R tel que pour tout point $m \in E$, on ait $d(0, m) \leq R$. Faire un dessin représentant graphiquement cette situation.
3. Dans la définition ci-dessus, le choix de la distance à l'origine a-t-il une importance ?
4. Parmi les ensembles suivants, lesquels sont bornés/non-bornés ? (Représenter ces ensembles sur un graphique)

$$E_1 = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+,$$

$$E_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 \leq 4\},$$

$$E_3 = \text{Le disque de centre } (1, 0) \text{ et de rayon } 1,$$

$$E_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^2, y \leq e^{-x}\}.$$