4. $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(x)\,dx$ pour $n \in \mathbb{N}$. On peut le faire par récurrence : IV 8

$\forall n \geq 2,\quad I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos^{n-2}(x)\right)\left(\cos^2(x)\right)dx$

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-2}(x)\left(1-\sin^2(x)\right)dx$

$= I_{n-2} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\left(\cos^{n-2}(x)\sin x\right)}_{v'(x)} \underbrace{\sin x}_{u(x)}\,dx$

$= I_{n-2} - \left(\underbrace{\left[-\frac{\cos^{n-1}(x)}{n-1}\sin x \right]_0^{\frac{\pi}{2}}}_{0} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{-\cos^{n-1}(x)}{n-1}\cos x\,dx \right)$

$= I_{n-2} - \frac{1}{n-1} I_n$ Donc $I_n\left(1+\frac{1}{n-1}\right) = I_{n-2}$ donc $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$.

Donc par récurrence, pour $\forall m \in \mathbb{N}$,

$\int_0^{\pi/2} 1\,dx = \frac{\pi}{2}$

$I_{2m} = \frac{(2m-1)(2m-3)\cdots\times 1}{2m(2m-2)\times\cdots\times 2} I_0 = \frac{(2m)!/2m(2m-2)\cdots(2)}{2^m\, m!} I_0 = \frac{(2m)!}{2^{2m}(m!)^2} \times \frac{\pi}{2}$

et $I_{2m+1} = \frac{2m(2m-2)\cdots 2}{(2m+1)(2m-1)(\ldots)(3)} I_1 = \frac{2^m\, m!}{(2m+1)!/2^m\, m!} = \frac{2^{2m}(m!)^2}{(2m+1)!}$

$\int_0^{\pi/2} \cos(x)\,dx = \left[\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$

(Les intégrales de Wallis servent à donner des approx rationnelles de π, calculer l'intégrale de Gauss...)

Exercice 47 Soit F une primitive (C^1) de f ; alors $g(x) = F(x^2) - F(2x)$

Donc par composition g est C^1 et $g'(x) = 2x F'(x^2) - 2F'(x) = 2x f(x^2) - 2f(x)$

Exercice 48 1) Par récurrence sur le degré de P on peut montrer que $\deg Q = \deg P$ ($\text{si } a \neq 0$) Si $a=0$, les primitives d'un polynôme sont des polynômes, ok.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons qu'on l'a montré pour $\forall P$ tq $\deg P = m$. Soit P de degré $m+1 \geq 1$

$\int P(x)e^{ax}\,dx = \left[P(x)\frac{e^{ax}}{a} \right] - \underbrace{\int P'(x)\frac{e^{ax}}{a}\,dx}_{= R(x)e^{ax}+C \text{ par récurrence}} = \underbrace{\left(\frac{P(x)}{a} - R(x)\right)}_{Q(x),\text{ de degré } m+1 \text{ car}} e^{ax} + C$

$\deg(R) = \deg P' = m$ et $\deg \frac{P}{a} = m+1$

2) Même chose. Par IPP et récurrence, l'hypothèse de récurrence étant

$$H_n : \forall P \in \mathbb{R}_n[X], \int P(x)\cos(\alpha x)\,dx \text{ et } \int \underbrace{P(x)\sin(\alpha x)\,dx}_{(*)} \text{ sont de la forme } x \mapsto Q_1(x)\cos(\alpha x) + Q_2(x)\sin(\alpha x)$$

On enlève $(*)$ et faire 2 IPP successives.