Feuille 5

Exercice 0. Produit extérieur. Soit E un espace vectoriel. Pour tous entiers positifs k, l et toutes formes $\alpha \in A_k(E)$ et $\beta \in A_l(E)$, on définit

$$\alpha \wedge \beta : (v_1, \dots, v_{k+l}) \in E^{k+l} \mapsto \frac{1}{k!l!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{k+l}} \epsilon(\sigma) \alpha(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) \beta(v_{\sigma(k+1)}, \dots, v_{\sigma(k+l)}).$$

1. Que donne cette formule dans le cas où α et $\beta \in E^*$?
2. Montrer que $\alpha \wedge \beta \in A_{k+l}(E)$.
3. Vérifier que l'application $(\alpha, \beta) \mapsto \alpha \wedge \beta$ est bilinéaire et que
$$\forall (\alpha, \beta) \in A_k(E) \times A_l(E), \quad \beta \wedge \alpha = (-1)^{kl} \alpha \wedge \beta.$$
4. On note $\mathfrak{S}_{k,l}$ l'ensemble des éléments $\sigma \in \mathfrak{S}_{k+l}$ satisfaisant $\sigma(1) < \cdots < \sigma(k)$ et $\sigma(k+1) < \cdots < \sigma(k+l)$. Vérifier que
$$\alpha \wedge \beta(v_1, \dots, v_{k+l}) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{k,l}} \epsilon(\sigma) \alpha(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) \beta(v_{\sigma(k+1)}, \dots, v_{\sigma(k+l)}).$$

On vérifie également que pour toutes formes multilinéaires alternées α, β et γ, $(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma = \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma)$. On notera donc simplement $\alpha \wedge \beta \wedge \gamma$ cette forme. Plus généralement, étant données n formes multilinéaires alternées $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, on peut définir sans ambiguïté $\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_n$.

Exercice 1. Premiers calculs. Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $l_1, \dots, l_k \in E^*$.

1. Montrer que pour tout $(v_1, \dots, v_k) \in E^k$,
$$l_1 \wedge \ldots \wedge l_k(v_1, \dots, v_k) = \det(l_j(v_i))_{1 \le i,j \le k}.$$
2. On note $(dx^1, ..., dx^n)$ (resp. (dx, dy, dz)) la base duale de la base canonique de $\mathbb{R}^n$ (resp. $\mathbb{R}^3$). Soit $I = \{i_1, \dots, i_k\}$ avec $1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n$ des entiers. Vérifier que la forme k-linéaire alternée dx^I définie en cours n'est autre que $dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}$.
3. Calculer dans $\mathbb{R}^3$:
$$dx \wedge dx, \qquad (dx + dy) \wedge dx, \qquad (dx + dy) \wedge dz, \qquad (dx \wedge dy + dy \wedge dz + dz \wedge dx) \wedge dz.$$
4. Soient $\alpha = 3dx + 5dy$, $\beta = dx \wedge dy + dy \wedge dz + dz \wedge dx$, $v_1 = (1, 0, 0)$, $v_2 = (1, 2, 0)$ et $v_3 = (1, 2, 3)$. Calculer $(\alpha \wedge \beta)(v_1, v_2, v_3)$.
5. Comment interprétez-vous en termes de déterminants de matrices les égalités suivantes dans $\mathbb{R}^n$:
$$dx^{1,\dots,n} = dx^1 \wedge dx^{2,\dots,n}, \qquad dx^{1,\dots,n} = dx^{1,\dots,n-1} \wedge dx^n,$$
$$dx^{1,\dots,n} = dx^{1,\dots,k} \wedge dx^{k+1,\dots,n}, \qquad 1 \le k \le n.$$

6. Montrer qu'une famille de formes linéaires $(l_1, \dots, l_k)$ d'un espace vectoriel E est libre si et seulement si $l_1 \wedge \dots \wedge l_k \neq 0$. Montrer que des vecteurs $x_1, \dots, x_k$ de E sont linéairement dépendants si et seulement si $\alpha(x_1, \dots, x_k) = 0$ pour toute forme alternée α de degré k.

Exercice 2 (produit vectoriel)**.** Rappelons que le produit vectoriel $v \times w$ de deux vecteurs $v = (v_1, v_2, v_3)$ et $w = (w_1, w_2, w_3)$ dans $\mathbb{R}^3$ est défini formellement en développant selon la première ligne le déterminant

$$\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix},$$

avec (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Ainsi

$$v \times w = \begin{vmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{vmatrix} e_1 - \begin{vmatrix} v_1 & v_3 \\ w_1 & w_3 \end{vmatrix} e_2 + \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{vmatrix} e_3.$$

(i) Montrer que le produit vectoriel définit une application bilinéaire antisymétrique

$$\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3.$$

Exprimer les coordonnées du produit vectoriel en tant que formes bilinéaires alternées en v et w à l'aide de la base canonique de $A_2(\mathbb{R}^3)$.

[L'on pourra vérifier, quoique ceci est hors-sujet dans le contexte que nous étudions, que le produit vectoriel définit une structure d'algèbre de Lie sur $\mathbb{R}^3$.]

(ii) Montrer que

$$v \times w \perp v, \qquad v \times w \perp w.$$

(iii) Montrer que $v \times w = 0$ si et seulement si les vecteurs v et w sont linéairement dépendants.

(iv) Montrer l'identité

$$\|v \times w\|^2 = \det(v|w|v \times w).$$

En déduire que, si v et w sont linéairement indépendants, alors $(v, w, v \times w)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

(v) Soient $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^3$. Vérifier que l'aire du parallélogramme construit sur v_1, v_2 est égale à

$$\|v_1 \times v_2\|.$$

Vérifier que le volume du parallélépipède $P(v_1, v_2, v_3)$ construit sur v_1, v_2, v_3 est égal à

$$\det(\langle v_i, v_j \rangle)^{1/2}.$$

(vi) Soit $u \in \mathbb{R}^3$. Montrer que

$$\det(v|w|u) = \langle v \times w, u \rangle.$$

(vii) Étant donnés $n-1$ vecteurs $v_1, \dots, v_{n-1} \in \mathbb{R}^n$, l'on définit leur produit vectoriel $v_1 \times \dots \times v_{n-1}$ en développant formellement selon la première ligne le déterminant

$$\begin{vmatrix} e_1 & \dots & e_n \\ & v_1 & \\ & \vdots & \\ & v_{n-1} & \end{vmatrix}.$$

Que deviennent les propriétés du produit vectoriel dans $\mathbb{R}^3$ dans ce cadre ?