Devoir Maison 2

Distribué le 18 novembre 2016, à rendre le 25 novembre 2016

---

1. Soient (x, y, z, t) les coordonnées canoniques sur $\mathbb{R}^4$. Considérons

$$\alpha = dx + dy + dz + dt \in \Omega^1(\mathbb{R}^4), \qquad \omega = dx \wedge dy + dz \wedge dt \in \Omega^2(\mathbb{R}^4).$$

Calculer

$$\alpha \wedge \alpha, \quad \alpha \wedge \omega, \quad \omega \wedge \omega, \quad \omega \wedge \omega \wedge \omega.$$

2. Soient (x, y, z, t) les coordonnées canoniques sur $\mathbb{R}^4$, avec (dx, dy, dz, dt) la base duale de la base canonique de $\mathbb{R}^4$. Notons

$$\omega = dx \wedge dy + dz \wedge dt \in A_2(\mathbb{R}^4).$$

(i) Montrer que, pour tout $v \in \mathbb{R}^4$, il existe $w \in \mathbb{R}^4$ tel que $\omega(v, w) > 0$.
(ii) Montrer que l'application $\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, $v \mapsto \omega(v, \cdot)$ est un isomorphisme linéaire.
(iii) Soit $V \subset \mathbb{R}^4$ un sous-espace vectoriel. L'on note

$$V^{\perp_\omega} = \{w \in \mathbb{R}^4 \,:\, \forall\, v \in V, \, \omega(v, w) = 0\}.$$

Montrer que $\dim V^{\perp_\omega} = 4 - \dim V$.
(iv) Donner des exemples de sous-espaces vectoriels V tels que :
– $V^{\perp_\omega} = V$.
– $V^{\perp_\omega} \cap V = \{0\}$.
– $V^{\perp_\omega} \subsetneq V$ et $\dim V < 4$.
– $V^{\perp_\omega} \supsetneq V$ et $\dim V > 0$.

3. Soient (x, y) les coordonnées canoniques sur $\mathbb{R}^2$ et $(r, \theta) \in \,]0, \infty[\times]0, 2\pi[$ les coordonnées polaires sur $\mathbb{R}^2 \setminus [0, \infty[\times \{0\}$. Montrer les identités

$$dx = \cos\theta dr - r\sin\theta d\theta, \qquad dy = \sin\theta dr + r\cos\theta d\theta,$$

et

$$dr = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}dx + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}dy, \qquad d\theta = -\frac{y}{x^2 + y^2}dx + \frac{x}{x^2 + y^2}dy.$$

Préciser les points auxquels ces identités ont lieu.

4. Considérons la 1-forme

$$\alpha = -\frac{y}{x^2 + y^2}dx + \frac{x}{x^2 + y^2}dy \in \Omega^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}).$$

Soit $S(R)$ le cercle de centre $(0, 0)$ et de rayon $R > 0$ dans $\mathbb{R}^2$. Calculer

$$\int_{S(R)} \alpha.$$

5. Considérons l'hyperboloïde à une nappe

$$\mathcal{H} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2 + y^2 = 1 + z^2\}.$$

Dessiner $\mathcal{H}$. Justifier que $\mathcal{H}$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^3$ de dimension 2.

Construire un champ de vecteurs complet sur $\mathbb{R}^3$ dont les courbes intégrales par tout point de $\mathcal{H}$ soient contenues dans $\mathcal{H}$ et qui n'ait pas d'orbites périodiques.