Feuille 3. Séries entières

Correction

Exo 1 1) Soit $z \in \mathbb{C}$. Si $(\sum a_n z^n)$ cv absolument, elle converge (résultat général sur les séries num.)

Si $(\sum a_n z^n)$ cv, son terme général tend vers 0 (" ")

Si $(a_n z^n)$ tend vers 0, en particulier elle converge, donc elle est bornée.

Ceci montre que $E_{CVA} \subset E_{cv} \subset E_0 \subset E_{borné}$.

2) Soit $z \in \mathbb{C}$. Si $z=0$, aucun $y \in \mathbb{C}$ ne satisfait $|y|<|z|=0$, donc la propriété est vraie.

Si $z \neq 0$, soit $y \in \mathbb{C}$ tq $|y|<|z|$ (cette fois, cela existe). On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n y^n = a_n z^n \left(\frac{y}{z}\right)^n$$

Or par hyp. $(a_n z^n)$ est bornée donc il existe $M \in \mathbb{R}$ tq, $\forall n \in \mathbb{N}$, $|a_n z^n| \leq M$, et par suite : $\forall n \in \mathbb{N} \quad |a_n y^n| \leq M . \left|\frac{y}{z}\right|^n$, terme général d'une série géométrique convergente car $\left|\frac{y}{z}\right| = \frac{|y|}{|z|} < 1$

Donc par comparaison, $(\sum |a_n y^n|)$ converge, ie $(\sum a_n y^n)$ CVA, ie $y \in E_{CVA}$

3) Si $R_a = 0$, la 1ere inclusion est immédiate.
Sinon, soit $y \in D(0,R_a) \neq \emptyset$, ie tq $|y|<R_a$. Par définition de R_a $(= \sup\{|z|, z \in E_{cv}\})$, il existe $z \in E_{cv}$ tq $|y|<|z|<R_a$ (⚠, on n'a pas dit que $R_a \in E_{cv}$, ce qui est faux en général !)

En particulier, $z \in E_{borné}$, donc d'après la question précédente, $y \in E_{CVA}$.

On a donc bien $D(0,R_a) \subset E_{CVA}$.

La deuxième inclusion est immédiate si $R_a = +\infty$.
Sinon, soit $z \in E_{borné}$. D'après ce qui précède, $D(0,|z|) \subset E_{CVA} \subset E_{cv}$
Or par définition de R_a, $\forall y \in E_{cv}$, $|y| \leq R_a$, ie $E_{cv} \subset \bar{D}(0,R_a)$.

Ainsi, $D(0,|z|) \subset \bar{D}(0,R_a)$, ce qui entraîne $|z| \leq R_a$, ie $z \in \bar{D}(0,R_a)$

ce qui donne l'inclusion voulue.

4) par hypothèse sur E, $\underbrace{[0,R[}_{\{|z|,\, z\in D(0,R)\}} \subset \{|z|, z\in E\} \subset \underbrace{[0,R]}_{\{|z|,\, z\in \bar{D}(0,R)\}}$

donc $R = \sup [0,R[\leq \sup\{|z|, z\in E\} \leq \sup [0,R] = R$, ce qui conclut.

5) D'après 1 et 3, pour $* = CVA, CV, 0$ et borné, $D(0,R_a) \subset E_* \subset \bar{D}(0,R_a)$

donc la q. 4 donne les égalités voulues

Exercice 2 1. (a) $l<1$ donc il existe $\varepsilon>0$ tq $l+\varepsilon<1$ (par exemple $\varepsilon = \frac{1-l}{2}$)

Pour cet $\varepsilon>0$, par convergence de $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ vers l, il existe $N\in\mathbb{N}$ tq $\forall n\geq N$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq l+\varepsilon =: \alpha > 0$

($l-\varepsilon \leq \dots$ mais cette partie est inutile)

(u_n) étant positive, on a donc : $\forall n\geq N$, $u_{n+1} \leq \alpha u_n$.

Une récurrence immédiate donne alors $\forall n\geq N$, $0 \leq u_n \leq \alpha^{n-N} u_N = \alpha^n . \underbrace{\beta}_{\alpha^{-N}u_N}$,

terme général d'une série géométrique convergente $(0<\alpha<1)$. Par comparaison de séries à TG ≥ 0, $\left(\sum\limits_{n\geq N} u_n\right)$ est elle aussi CV, et donc $\left(\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n\right)$ également.

(b) • Si $l\in]1,+\infty[$: il existe $\varepsilon>0$ tq $1 < \underbrace{l-\varepsilon}_{\alpha}$ (par ex, $\varepsilon = \frac{l-1}{2}$) et alors par convergence de $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ vers l, il existe $N\in\mathbb{N}$ tq $\forall n\geq N$, $\alpha = l-\varepsilon \leq \frac{u_{n+1}}{u_n}$ ($\leq l+\varepsilon$ mais peu importe)

• si $l=+\infty$ on prend $\alpha>1$ quelconque. Par déf, comme $\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$,

il existe $N\in\mathbb{N}$ tq $\forall n\geq N$ $\alpha \leq \frac{u_{n+1}}{u_n}$

Dans les deux cas, tjs par positivité de (u_n), on a bien : $\exists \alpha>1$, $\exists N\in\mathbb{N}$, $\forall n\geq N$, $u_{n+1} \geq \alpha u_n$

Une récurrence immédiate donne alors : $\forall n\geq N$ $u_n \geq \alpha^{n-N} u_N = \alpha^n . \underbrace{\beta}_{\alpha^{-N}u_N} > 0$

terme général ≥ 0 d'une série géométrique divergente ($\alpha>1$), donc par comparaison, $\left(\sum\limits_{n\geq N} u_n\right)$ diverge, donc $\left(\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n\right)$ aussi.

(c) • ex1 $u_n = 1$ $\forall n\in\mathbb{N}$ $\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ et $(\sum u_n)$ diverge

• ex2 $u_n = \frac{1}{(n+1)^2}$ $\forall n\in\mathbb{N}$. $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ et $(\sum u_n)$ converge (Riemann)

2) (a) • On a toujours $0 \in E_{CVA}$

• Soit $z \in \mathbb{C}^*$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = a_n z^n \neq 0$ par hypothèse

$$\forall n \in \mathbb{N}, \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| |z| \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell|z| =: \ell'$$

Si $\underline{z \in D(0, \frac{1}{\ell})}$, ie $|z| < \frac{1}{\ell}$, $\ell' < 1$, donc par 1) $(\sum |u_n|)$ CV, ie $(\sum a_n z^n)$ CVA, ie $\underline{z \in E_{CVA}}$

Si $\underline{z \notin \bar{D}(0, \frac{1}{\ell})}$, ie $|z| > \frac{1}{\ell}$, $\ell' > 1$, ———————— diverge, ie $\underline{z \notin E_{CVA}}$

On a donc bien $\quad D(0, \frac{1}{\ell}) \subset E_{CVA} \subset \bar{D}(0, \frac{1}{\ell})$

Ceci montre d'après exo 1.4 que $\sup\{|z|, z \in E_{CVA}\} = \frac{1}{\ell}$

Or d'après Exo 1.5, $\sup\{|z|, z \in E_{CVA}\} = R_a$.

Donc $\boxed{R_a = \frac{1}{\ell}}$

(b) On commence comme dans la question précédente : $\underline{0 \in E_{CVA}}$ et

$\underline{\forall z \in \mathbb{C}^*}$, si $(u_n)_n := (a_n z^n)_n$, $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| \longrightarrow \ell|z| = \underline{0}$ ici

Donc d'après 1)(a), $\sum |u_n|$ cv, ie $(\sum a_n z^n)$ CVA, et ce $\underline{\forall z \in \mathbb{C}}$

Comme E_{CVA} est bien entendu inclus dans $\mathbb{C}$, on a finalement $\underline{E_{CVA} = \mathbb{C}}$,

et donc $\underline{R_a = \sup\{|z|, z \in \mathbb{C}\} = +\infty}$.

(c) Cette fois ci, $\underline{\forall z \in \mathbb{C}^*}$, en posant $(u_n)_n = (a_n z^n)_n$ toujours, $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| \longrightarrow +\infty$

donc en appliquant 1) b), $(\sum |u_n|)$ diverge, ie $(\sum a_n z^n)$ ne cv pas absolument.

Ainsi $\underline{E_{CVA} \text{ est réduit à } \{0\}}$ et donc $\underline{R_a = \sup\{|z|, z \in E_{CVA}\} = 0}$.

Exercice 3 1) • $x \mapsto -\frac{1}{x^2}$ est C^∞ sur $\mathbb{R}^*$ (rationnelle), à valeurs dans $\underline{\mathbb{R}^*}$

• exp est C^∞ sur $\underline{\mathbb{R}^*}$

Donc par composition, f est C^∞ sur $\mathbb{R}^*$

Démontrons par récurrence sur k que : $\forall k \in \mathbb{N}$, R_k : " $\exists P_k \in \mathbb{R}[X]$ tq $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $f^{(k)}(x) = P_k\left(\frac{1}{x}\right) f(x)$ "

est vraie.

Initialisation : $k=0$ $f^{(k)} = 1 \times f$ donc $P_0 = 1$ convient.
(polynôme de degré 0)

Hérédité : Soit $k \in \mathbb{N}$. Supposons R_k vraie. Soit $P_k \in \mathbb{R}[X]$ tq $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $f^{(k)}(x) = P_k\left(\frac{1}{x}\right) f(x)$.

Alors $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $f^{(k+1)}(x) = \left(f^{(k)}\right)'(x) = -\frac{1}{x^2} P_k'\left(\frac{1}{x}\right) f(x) + P_k\left(\frac{1}{x}\right) f'(x)$

(" $x \mapsto \frac{1}{x}$ C^∞ de $\mathbb{R}^*$ dans $\mathbb{R}^*$, $P_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ C^∞ donc par composition ..... ")

Or $f'(x) = \frac{2}{x^3} f(x)$, donc $f^{(k+1)}(x) = \left(-\frac{1}{x^2} P_k'\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{2}{x^3} P_k\left(\frac{1}{x}\right)\right) f(x)$

En posant $P_{k+1}(X) = -X^2 P_k'(X) + 2X^3 P_k(X)$, qui est bien un polynôme, on a donc

$\forall x \in \mathbb{R}^*$, $f^{(k+1)}(x) = P_{k+1}\left(\frac{1}{x}\right) f(x)$, donc R_{k+1} est vraie, ce qui achève la réc.

2) $\forall k \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{y \to \pm\infty} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{polynomial}}}{P_k(y)} e^{-y^2} = 0$ par croissances comparées, et $\lim\limits_{x \to 0^\pm} \frac{1}{x} = \pm\infty$,

donc par composition, $\lim\limits_{x \to 0^\pm} f^{(k)}(x) = 0$.

Démontrons par récurrence sur k que $\forall k \in \mathbb{N}$, R_k : " f est de classe C^k sur $\mathbb{R}$ et $f^{(k)}(0) = 0$ " est vraie

Initialisation $k=0$ f est continue sur $\mathbb{R}^*$ et d'après le début de la question,
$$\lim_{x \to 0} f^{(0)}(x) = \lim_{x \to 0} f(x) = 0 = f(0)$$
donc f est C^0 sur $\mathbb{R}$, donc R_0 est vraie.
(et $f^{(0)}(0) = 0$)

Hérédité Soit $k \in \mathbb{N}$. Supposons R_k vraie. Alors

- $f^{(k)}$ est continue sur $\mathbb{R}$ (HR)
- $f^{(k)}$ est C^1 sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ par 1.
- $\lim\limits_{x \to 0} \underbrace{\left(f^{(k)}\right)'(x)}_{= f^{(k+1)}(x)}$ existe et vaut 0 par le début de la question.

Le thm du prolongement C^1 affirme alors que $f^{(k)}$ est C^1 sur $\mathbb{R}$, i.e. f est C^{k+1},
et $\underbrace{\left(f^{(k)}\right)'(0)}_{= f^{(k+1)}(0)} = 0$, ce qui achève la récurrence.

3) D'après le rappel de cours (ou le CCz), si f était développable en série entière

au voisinage de 0, les coeff du développement seraient nécessairement ses coeff de Taylor, tous nuls ici. Autrement dit, on aurait, au vois de 0,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \underbrace{\frac{f^{(k)}(0)}{k!}}_{0} x^k = 0,$$

ie f nulle au voisinage de 0, ce qui n'est pas le cas ($f(x) \neq 0$ dès que $x \neq 0$)
Donc f n'est pas développable en série entière au vois de 0 (et ce bien que sa série de Taylor ait un rayon de cv égal à $+\infty$!)

Exo 4 1) $\forall x \in \mathbb{C}$, $\frac{x^n}{n!} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ (croissances comparées), donc (cor1) $R \geqslant |x|$,
où R est le rayon de cv de la série entière $\left(\sum \frac{z^n}{n!}\right)$. Ainsi $R = +\infty$
(on peut aussi invoquer la règle de d'Alembert)

2) $\forall z \in \mathbb{C}$ tq $|z| < R$, ie en fait $\forall z \in \mathbb{C}$, $\left(\sum \frac{z^n}{n!}\right)$ cv (par caractérisation du rayon de cv) donc en particulier, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\left(\sum \frac{x^n}{n!}\right)$ cv, ce qui signifie précisément que f est bien définie sur $\mathbb{R}$.

Par propriété des sommes de séries entières, f est C^∞ sur $\mathbb{R}$ ($=]-R, R[$) et sa dérivée s'obtient par dérivation terme à terme : (le 1er, constant, est de dérivée nulle)

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k!} \times k x^{k-1} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(k-1)!} x^{k-1} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{glissement} \\ \text{d'indice}}}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = f(x)$$

Donc f est solution de l'ED : $y' = y$.

Enfin, $f(0) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{0^k}{k!} = \underbrace{\frac{0^0}{0!}}_{1} + \sum_{k=1}^{+\infty} 0 = 1$

3) Par unicité de la solut° de $y' = y$ valant 1 en 0, $f = \exp$ sur $\mathbb{R}$:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \exp(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$$

donc exp est développable en série entière en 0 et le domaine de validité du développement est $\mathbb{R}$ tout entier.

Exercice 5 1) $\forall x \in I$, $(f_\alpha)'(x) = \alpha (1+x)^{\alpha-1} = \frac{\alpha}{1+x} f_\alpha(x)$

donc f_α est solution de (E_α) : $y' = \frac{\alpha}{1+x} y$, qui est bien une EDLH1.

2) On suppose qu'il existe $R>0$ (nécessairement <1) et $(a_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tq $\forall x \in]-R,R[\subset I$, $f_\alpha(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$

Alors par propriété des sommes de séries entières,

$$\forall x \in]-R,R[, \quad f_\alpha'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$$

Ainsi, $\forall x \in]-R,R[$:

$$\underbrace{(1+x) f_\alpha'(x) = \alpha f_\alpha(x)}_{(*)} \iff (1+x)\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = \alpha \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

$$\iff \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha a_n x^n = 0$$

$$\iff \sum_{k=0}^{+\infty} (k+1) a_{k+1} x^k + \sum_{k=0}^{+\infty} k a_k x^k - \sum_{k=0}^{+\infty} \alpha a_k x^k = 0$$

$$\iff \underbrace{\sum_{k=0}^{+\infty} \big((k+1)a_{k+1} + (k-\alpha)a_k\big) x^k = 0}_{(**)}$$

(*) étant supposée vraie $\forall x \in]-R,R[$ ($R>0$), (**) l'est aussi, ce qui donne par identification (unicité si existence du dév^t en série entière au voisinage d'un point) :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad (k+1) a_{k+1} = (\alpha - k) a_k,$$

ie : $$\forall k \in \mathbb{N}, \quad a_{k+1} = \frac{\alpha - k}{k+1} a_k$$

ce qui donne, par une récurrence facile, $\forall k \in \mathbb{N}$ $a_k = \dfrac{\prod_{j=0}^{k-1} (\alpha - j)}{k!} a_0$

où $a_0 = f(0) = 1$.

3) Pour la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de la fin de la question précédente, si $\alpha \notin \mathbb{N}$, $a_k \neq 0$ $\forall k \in \mathbb{N}$ et

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \underset{\text{apcr}}{=} \frac{k-\alpha}{k+1} \xrightarrow[k\to+\infty]{} 1$$ donc par la règle de d'Alembert, le rayon de cv de $\left(\sum a_n z^n\right)$ est $\frac{1}{1} = 1$.

Si $\alpha \in \mathbb{N}$ ($\alpha = N$), $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante égale à 0 à partir du rang $N+1$, donc le rayon est $+\infty$, mais dans ce cas on a directement $(1+x)^N = \sum_{n=0}^{N} \binom{N}{n} x^n$ ($+0$) par la formule du binôme de Newton.

4) On considère la fct° f définie sur $]-1,1[$ par $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ avec $\begin{cases} a_n = \dfrac{\prod_{j=0}^{n-1}(\alpha - j)}{n!} & \forall n \geq 1 \\ a_0 = 1 \end{cases}$

par la q. précédente.

On veut montrer qu'elle coïncide sur $]-1,1[$ avec f_α. Pour cela, par unicité dans le théorème de Cauchy-Lipschitz, il suffit de justifier que f est sol de (E_α) et que $f(0)=1$. Ce dernier point est immédiat : $f(0) = a_0 = 1$.

Par construction, $\forall k \in \mathbb{N}$, $(k+1)a_{k+1} + (k-\alpha)a_k = 0$, donc $(**)$ de la page précédente est satisfaite. Par propriété des sommes de séries entières, f est dérivable sur $]-1,1[$ et $\forall x \in]-1,1[$, $f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$.

Les équivalences de la page précédente montrent donc que $\forall x \in]-1,1[$,

$(1+x) f'(x) = \alpha f(x)$, ce qu'on voulait.

(On remarque que la rédaction est assez pénible en procédant comme ceci. Il aurait mieux valu commencer par obtenir une CNS sur les fct° DSE (par f_α) pour être solution de (E_α).)

Ainsi f_α est DSE en 0 et $\forall x \in]-1,1[$, $f_\alpha(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n$

Le domaine de validité contient $]-1,1[$ et est inclus ds $[-1,1]$ vu que le rayon de cv vaut 1. Reste donc à voir ce qui se passe en ± 1 ---