Quelques rappels : séries alternées, méthode d'Abel et comparaison séries/intégrales

Séries alternées.

Un exemple type : $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.

Montrer que, si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de nombres réels positifs, décroissante et tendant vers 0, alors la série $\sum_{n\in\mathbb{N}}(-1)^n a_n$ converge.

Pour cela, on pourra montrer que les suites $(S_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(T_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes, où

$$S_k = \sum_{n=0}^{2k}(-1)^n a_n \quad \text{et} \quad T_k = \sum_{n=0}^{2k+1}(-1)^n a_n.$$

Estimation du reste : sous les hypothèses précédentes, montrer que le reste $r_N = \sum_{n=N}^{\infty}(-1)^n a_n$ est du signe de $(-1)^N$ pour tout $N \in \mathbb{N}$, et qu'on a

$$\forall N \in \mathbb{N}, \quad |r_N| \leqslant a_N$$

(on pourra sommer par paquets, $(-1)^N r_N = (a_N - a_{N+1}) + (a_{N+2} - a_{N+3}) + \cdots = a_N - (a_{N+1} - a_{N+2}) - (a_{N+3} - a_{N+4}) - \dots$).

Ces résultats s'appliquent-ils à la série $\sum_{n\geqslant 2} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$?

Méthode d'Abel (intégration par parties discrète).

Un exemple type : $\sum_{n\geqslant 1} \frac{\cos(n\theta)}{\sqrt{n}}$, où θ est un réel donné, non multiple entier de 2π.

Montrer que, si
- $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de nombres réels positifs, décroissante et tendant vers 0,
- $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de nombres complexes telle que la suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des sommes partielles $B_n = \sum_{k=0}^{n} b_k$ est bornée,

alors la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n b_n$ converge.

Pour cela, on pourra montrer que, lorsque $1 \leqslant p < q$, on a

$$\sum_{n=p}^{q} a_n b_n = -a_p B_{p-1} + \sum_{n=p}^{q-1}(a_n - a_{n+1})B_n + a_q B_q.$$

Estimation du reste : sous les hypothèses précédentes, montrer que

$$\forall N \in \mathbb{N}, \quad |\sum_{n=N}^{\infty} a_n b_n| \leqslant 2a_N B,$$

où B est un majorant de $\{|B_n|, n \in \mathbb{N}\}$.

Remarque : on peut remplacer les hypothèses sur $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par "$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de nombres complexes tendant vers 0 et telle que la série $\Sigma_{n\in\mathbb{N}}(a_n - a_{n+1})$ est absolument convergente".

Comparaison séries/intégrales.

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction continue, décroissante, et tendant vers 0 à l'infini (donc, positive).

Montrer qu'on a, lorsque $1 \leqslant p \leqslant q$:

$$\int_p^{q+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{n=p}^{q} f(n) \leqslant \int_{p-1}^{q} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

En déduire que :

- la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} f(n)$ converge si et seulement si l'intégrale $\int_0^{\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ est finie ;
- dans le cas de la convergence, on a l'estimation suivante du reste :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad \int_p^{\infty} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{n=p}^{\infty} f(n) \leqslant \int_{p-1}^{\infty} f(t)\,\mathrm{d}t;$$

- dans le cas de la divergence, on a l'estimation suivante de la somme partielle :

$$\forall q \in \mathbb{N}, \quad \int_1^{q+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{n=1}^{q} f(n) \leqslant \int_0^{q} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Cela s'applique par exemple aux séries

- de Riemann $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$: montrer qu'elle converge si et seulement si $\alpha > 1$;
- de Bertrand $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha(\ln(n))^\beta}$: montrer qu'elle converge lorsque $\alpha > 1$, ainsi que lorsque $\alpha = 1$ et $\beta > 1$

(on pourra utiliser dans l'intégrale le changement de variable $s = \ln t$), et que sinon, elle diverge.