

**Quelques rappels :
séries alternées, méthode d'Abel
et comparaison séries/intégrales**

Séries alternées.

Un exemple type : $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.

Montrer que, si $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de nombres réels positifs, décroissante et tendant vers 0, alors la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} (-1)^n a_n$ converge.

Pour cela, on pourra montrer que les suites $(S_k)_{k \in \mathbb{N}}$ et $(T_k)_{k \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes, où

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad S_k = \sum_{n=0}^{2k} (-1)^n a_n \quad \text{et} \quad T_k = \sum_{n=0}^{2k+1} (-1)^n a_n.$$

Estimation du reste : sous les hypothèses précédentes, montrer que le reste $r_N = \sum_{n=N}^{\infty} (-1)^n a_n$ est du signe de $(-1)^N$ pour tout $N \in \mathbb{N}$, et qu'on a

$$\forall N \in \mathbb{N}, \quad |r_N| \leq a_N$$

(on pourra sommer par paquets, $(-1)^N r_N = (a_N - a_{N+1}) + (a_{N+2} - a_{N+3}) + \dots = a_N - (a_{N+1} - a_{N+2}) - (a_{N+3} - a_{N+4}) - \dots$).

Ces résultats s'appliquent-ils à la série $\sum_{n \geq 2} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}$?

Méthode d'Abel (intégration par parties discrète).

Un exemple type : $\sum_{n \geq 1} \frac{\cos(n\theta)}{\sqrt{n}}$, où θ est un réel donné, non multiple entier de 2π .

Montrer que, si

- $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de nombres réels positifs, décroissante et tendant vers 0,

- $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de nombres complexes telle que la suite $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des sommes partielles $B_n = \sum_{k=0}^n b_k$

soit bornée,

alors la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n b_n$ converge.

Pour cela, on pourra montrer que, lorsque $1 \leq p < q$, on a

$$\sum_{n=p}^q a_n b_n = -a_p B_{p-1} + \sum_{n=p}^{q-1} (a_n - a_{n+1}) B_n + a_q B_q.$$

Estimation du reste : sous les hypothèses précédentes, montrer que

$$\forall N \in \mathbb{N}, \quad \left| \sum_{n=N}^{\infty} a_n b_n \right| \leq 2a_N B,$$

où B est un majorant de $\{|B_n|, n \in \mathbb{N}\}$.

Remarque : on peut remplacer les hypothèses sur $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par " $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de nombres complexes tendant vers 0 et telle que la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} (a_n - a_{n+1})$ soit absolument convergente".

Comparaison séries/intégrales.

Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, décroissante, et tendant vers 0 à l'infini (donc, positive).

Montrer qu'on a, lorsque $1 \leq p \leq q$:

$$\int_p^{q+1} f(t) dt \leq \sum_{n=p}^q f(n) \leq \int_{p-1}^q f(t) dt.$$

En déduire que :

- la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} f(n)$ converge si et seulement si l'intégrale $\int_0^{\infty} f(t) dt$ est finie ;
- dans le cas de la convergence, on a l'estimation suivante du reste :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad \int_p^{\infty} f(t) dt \leq \sum_{n=p}^{\infty} f(n) \leq \int_{p-1}^{\infty} f(t) dt;$$

- dans le cas de la divergence, on a l'estimation suivante de la somme partielle :

$$\forall q \in \mathbb{N}, \quad \int_1^{q+1} f(t) dt \leq \sum_{n=1}^q f(n) \leq \int_0^q f(t) dt.$$

Cela s'applique par exemple aux séries de Riemann $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ et de Bertrand $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha (\ln(n))^\beta}$.