Feuille d'exercices 5

Exercice 1. Quelle est la série de Fourier de la fonction $x \mapsto \cos^4(x)$?
Quelle est la série de Fourier d'un polynôme trigonométrique ?

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 2π-périodique, égale à $|x|$ sur $[-\pi, \pi[$. Tracer le graphe de f, donner sa série de Fourier et étudier la convergence de celle-ci. En déduire la valeur des sommes des séries

$$\left(\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{1}{(2k+1)^2}\right), \quad \left(\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2}\right), \quad \left(\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{1}{(2k+1)^4}\right), \quad \left(\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^4}\right).$$

Exercice 3. Développer la fonction $f : x \mapsto |\sin x|$ en série de Fourier et en déduire la valeur des sommes $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n^2-1}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(4n^2-1)^2}$.

Exercice 4. Montrer que pour tout $t \in]0, \pi[$, $-t + 2\pi = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(2 + (-1)^{n+1})}{n} \sin(nt)$.

Exercice 5. Montrer que pour tout $x \in [0, \pi]$,

$$x(\pi - x) = \frac{\pi^2}{6} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(2nx)}{n^2} = \frac{8}{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin((2n+1)x)}{(2n+1)^3}.$$

Exercice 6. Montrer que pour tout $t \in [0, 2]$, $t^2 = \dfrac{4}{3} + \displaystyle\sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{+\infty} \frac{2 + 2i\pi n}{\pi^2 n^2} e^{in\pi t}$.

Exercice 7. Pour chacune des propriétés suivantes, représenter l'allure du graphe d'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (non constante) 2π-périodique et continue par morceaux la satisfaisant, et montrer que certains coefficients de Fourier de f, à préciser, sont alors nuls :
a) $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x + \pi) = f(x)$;
b) $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x + \pi) = -f(x)$;
c) $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(\pi - x) = f(x)$;
d) $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(\pi - x) = -f(x)$.

Exercice 8. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $\alpha \in [0, 1[$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha^n \cos(nx) = \mathrm{Re}\left(\frac{1}{1 - \alpha e^{ix}}\right) = \frac{1 - \alpha\cos(x)}{1 + \alpha^2 - 2\alpha\cos(x)}, \quad \text{puis que}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1 - \alpha\cos(x)}{1 + \alpha^2 - 2\alpha\cos(x)} \cos(nx)\, dx = \begin{cases} \alpha^n/2 & \text{si } n \neq 0, \\ 1 & \text{si } n = 0. \end{cases}$$

Exercice 9. Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 2π-périodique et de classe $\mathcal{C}^p$. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, calculer $c_n(f)$ en fonction de $c_n(f^{(p)})$. Montrer que $c_n(f) = O(1/n^p)$.

Exercice 10. (Type examen). On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 2π-périodique, telle que $f(x) = \sin(x/2)$ si $x \in [0, 2\pi[$.

1) Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$ converge.

2) La fonction f est-elle :

a) continue sur $\mathbb{R}$?

b) dérivable sur $\mathbb{R}$?

c) de classe C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$?

3) On rappelle que les formules des produits de fonctions trigonométriques peuvent se retrouver à l'aide de l'exponentielle complexe. Montrer que la série de Fourier associée à f est la série de fonctions (avec abus de notation) :

$$\left(\frac{2}{\pi} - \sum_{n\geq 1} \frac{4}{\pi(2n-1)(2n+1)} \cos(nx)\right).$$

4) a) Quel est le domaine de convergence simple de cette série de Fourier ?

b) La convergence est-elle normale sur ce domaine ?

c) Quelle est la fonction somme de la série de Fourier sur ce domaine ?

5) Trouver la valeur de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$, tout d'abord en utilisant le théorème de Dirichlet, puis en remarquant qu'on a une somme téléscopique.

Exercice 11. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$, soit u une fonction positive et décroissante sur $[a, b]$ telle que $u(a) = 1$ et $u(b) = 0$, et v une fonction continue sur $[a, b]$ telle que $|v(t)| \leq 1$ $\forall t \in [a, b]$.

1) Pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \{0, \dots, n\}$, on pose $t_k = a + k(b-a)/n$ et

$$I_n = \sum_{k=0}^{n-1} u(t_{k+1}) \int_{t_k}^{t_{k+1}} v(t)\,\mathrm{d}t.$$

Montrer que $\displaystyle\left|I_n - \int_a^b u(t)v(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq \frac{1}{n}$.

2) Montrer que $\displaystyle I_n = \sum_{k=0}^{n-1} (u(t_k) - u(t_{k+1})) \int_a^{t_k} v(t)\,\mathrm{d}t$.

3) Montrer que $\displaystyle\left|\int_a^b u(t)v(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq \max_{x\in[a,b]} \left|\int_a^x v(t)\,\mathrm{d}t\right|$ (faire une transformation d'Abel).

4) Application : montrer que si f est une fonction 2π-périodique et monotone par morceaux, ses coefficients de Fourier sont en $O(1/n)$.

5) Retrouver ce résultat par une intégration par partie lorsque f est supposée de classe C^1 par morceaux.

Exercice 12. On admet qu'il existe $C \in \mathbb{R}_+$ tel que pour tout $(t, L) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N}^*$, $|\sum_{l=1}^{L} \frac{\sin(lt)}{l}| \leq C$. On pose, pour tout $(t, k) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N}^*$,

$$u_k(t) = \frac{\sin(4^{k^2} t)}{k^2} \sum_{l=1}^{2^{k^2}} \frac{\sin(lt)}{l}.$$

1) Montrer que la série de fonctions $(\sum_{k\in\mathbb{N}^*} u_k)$ converge normalement sur $\mathbb{R}$, et que sa somme, notée f, est continue et 2π-périodique.

2) Calculer les coefficients de Fourier de u_k pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. Exprimer les coefficients de Fourier de f en fonction des coefficients précédents.

3) Pour tout $N \in \mathbb{N}$, on note $S_N(f)$ la somme partielle à l'ordre N de la série de Fourier de f. Montrer que $(S_N(f)(0))_{N\in\mathbb{N}}$ diverge.