

Feuille d'exercices 5

Exercice 1. Quelle est la série de Fourier de la fonction $x \mapsto \cos^4 x$?

Quelle est la série de Fourier d'un polynôme trigonométrique ?

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, 2π -périodique, égale à $|x|$ sur $[-\pi, \pi]$. Tracer le graphe de f , donner sa série de Fourier et étudier la convergence de celle-ci. En déduire la valeur des sommes des séries

$$\sum \frac{1}{(2k+1)^2}, \quad \sum \frac{1}{k^2}, \quad \sum \frac{1}{(2k+1)^4}, \quad \sum \frac{1}{k^4}.$$

Exercice 3. Montrer que pour tout $x \in [0, \pi]$,

$$x(\pi - x) = \frac{\pi^2}{6} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2nx)}{n^2} = \frac{8}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin((2n+1)x)}{(2n+1)^3}.$$

Exercice 4. Développer la fonction $f : x \mapsto |\sin x|$ en série de Fourier et en déduire la valeur des sommes des séries

$$\sum \frac{1}{4n^2 - 1}, \quad \sum \frac{1}{(4n^2 - 1)^2}.$$

Exercice 5. Montrer que pour tout $t \in [0, 2]$, $t^2 = \frac{4}{3} + \sum_{n \in \mathbb{Z}, n \neq 0} \frac{2 + 2i\pi n}{\pi^2 n^2} e^{in\pi t}$.

Exercice 6. Montrer que pour tout $t \in]0, \pi[$, $-t + 2\pi = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(2 + (-1)^{n+1})}{n} \sin(nt)$.

Exercice 7. Soit f une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{C} , 2π -périodique et continue par morceaux, vérifiant l'une des propriétés suivantes :

- a) $\forall x \in \mathbb{R}, f(x + \pi) = f(x)$;
- b) $\forall x \in \mathbb{R}, f(x + \pi) = -f(x)$;
- c) $\forall x \in \mathbb{R}, f(\pi - x) = f(x)$;
- d) $\forall x \in \mathbb{R}, f(\pi - x) = -f(x)$.

Représenter l'allure de f et montrer que certains coefficients de Fourier de f sont alors nuls.

Exercice 8. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $\alpha \in [0, 1[$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha^n \cos(nx) = \operatorname{Re} \left(\frac{1}{1 - \alpha e^{ix}} \right) = \frac{1 - \alpha \cos(x)}{1 + \alpha^2 - 2\alpha \cos(x)},$$

et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha^n \sin(nx) = \operatorname{Im} \left(\frac{1}{1 - \alpha e^{ix}} \right) = \frac{\alpha \sin(x)}{1 + \alpha^2 - 2\alpha \cos(x)}.$$

Montrer que

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1 - \alpha \cos(x)}{1 + \alpha^2 - 2\alpha \cos(x)} \cos(nx) dx = \begin{cases} \alpha^n / 2 & \text{si } n \neq 0, \\ 1 & \text{si } n = 0. \end{cases}$$

Exercice 9. Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, 2π -périodique et de classe \mathcal{C}^p .

Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, calculer $c_n(f)$ en fonction de $c_n(f^{(p)})$.

Montrer que $c_n(f) = O(1/n^p)$.

Exercice 10. On considère la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, 2π -périodique, telle que $f(x) = \sin(x/2)$ si $x \in [0, 2\pi[$.

1) Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$ converge.

2) La fonction f est-elle :

a) continue sur \mathbb{R} ?

b) dérivable sur \mathbb{R} ?

c) de classe C^1 par morceaux sur \mathbb{R} ?

3) On rappelle que les formules des produits de fonctions trigonométriques peuvent se retrouver à l'aide de l'exponentielle complexe. Montrer que la série de Fourier associée à f est la série de fonctions :

$$\frac{2}{\pi} - \sum_{n \geq 1} \frac{4}{\pi(2n-1)(2n+1)} \cos(nx).$$

4) a) Quel est le domaine de convergence simple de cette série de Fourier ?

b) La convergence est-elle normale sur ce domaine ?

c) Quelle est la fonction somme de la série de Fourier sur ce domaine ?

5) Trouver la valeur de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$, tout d'abord en utilisant le théorème de Dirichlet, ensuite en remarquant qu'on a une somme télescopique.

Exercice 11. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$, soit u une fonction positive et décroissante sur $[a, b]$ telle que $u(a) = 1$ et $u(b) = 0$, et v une fonction continue sur $[a, b]$ telle que $|v(t)| \leq 1 \forall t \in [a, b]$.

1) Pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \{0, \dots, n\}$, on pose $t_k = a + k(b-a)/n$ et

$$I_n = \sum_{k=0}^{n-1} u(t_{k+1}) \int_{t_k}^{t_{k+1}} v(t) dt.$$

Montrer que $\left| I_n - \int_a^b u(t)v(t) dt \right| \leq \frac{1}{n}$.

2) Montrer que $I_n = \sum_{k=0}^{n-1} (u(t_k) - u(t_{k+1})) \int_a^{t_k} v(t) dt$.

3) Montrer que $\left| \int_a^b u(t)v(t) dt \right| \leq \max_{x \in [a, b]} \left| \int_a^x v(t) dt \right|$ (faire une transformation d'Abel).

4) Application : montrer que si f est une fonction 2π -périodique et monotone par morceaux, ses coefficients de Fourier sont en $O(1/n)$.

5) Retrouver ce résultat par une intégration par partie lorsque f est supposée de classe C^1 par morceaux.