Feuille d'exercices 4

Exercice 1. Trouver les rayons de convergence des séries entières de terme général :
(a) nz^n ; (b) $n!z^n$; (c) $\frac{z^n}{n!}$; (d) $\frac{n^n}{n!}z^n$; (e) $2^{-n}(1+\frac{1}{n})^{n^2}z^n$.

Exercice 2. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$

(a) si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite bornée ne tendant pas vers 0.

(b) si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite qui tend vers 0, telle que $\sum_{n\geqslant 0} a_n$ diverge.

Exercice 3. Soient $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergence R et R', respectivement.

(a) Montrer que si on a $|a_n| \leqslant |b_n|$ à partir d'un certain rang, alors $R \geqslant R'$.

(b) Montrer que si $|a_n| \sim |b_n|$, alors $R = R'$.

Exercice 4. Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ une série entière. Montrer que les deux séries $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ et $\sum_{n\geqslant 0} |a_n| z^n$ ont même rayon de convergence. Les domaines de convergence sont-ils nécessairement égaux ?

Exercice 5. Soit $\sum a_n x^n_{n\in\mathbb{N}}$ une série entière de rayon $R > 0$ et de somme f sur $]-R, R[$.

1. Montrer que f est paire si et seulement si pour tout $k \in \mathbb{N}$, $a_{2k+1} = 0$.
2. Montrer que f est impaire si et seulement si pour tout $k \in \mathbb{N}$, $a_{2k} = 0$.
3. Montrer que $f^{(n)}$ est la fonction nulle si et seulement si pour tout $k \geqslant n$, $a_k = 0$.

Exercice 6. [CC du 05/05/2010]
1) Développer en série entière de la variable x la fonction $x \mapsto \frac{1}{1-x^3}$.
2) En déduire le développement en série entière de $\frac{1}{1+x+x^2}$.

Exercice 7. Trouver le rayon de convergence des séries entières dont les termes généraux sont :

(a) $2^n z^{2n}$, c'est-à-dire la série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ avec $a_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est impair,} \\ 2^{n/2} & \text{si } n \text{ est pair.} \end{cases}$

(b) $a_n z^n$ avec $a_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ est impair,} \\ 2^n & \text{si } n \text{ est pair.} \end{cases}$

Exercice 8. [CC du 05/05/2010] Déterminer le rayon de convergence R puis la somme pour $x \in]-R, R[$ de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{2n+1} x^{2n+1}$.

Exercice 9. Déterminer le rayon de convergence et la somme des séries entières suivantes :
(a) $\sum_{n\geqslant 2} \frac{x^n}{n(n-1)}$; (b) $\sum_{n\geqslant 0} n(n+1)x^n$; (c) $\sum_{n\geqslant 0} \frac{3n}{n+2}x^n$; (d) $\sum_{n\geqslant 0} \frac{n^2+n-1}{n!}x^n$.

Exercice 10. Séries entières à coefficients positifs.
Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ une série entière ayant des coefficients a_n tous positifs et un rayon de convergence égal à 1. La somme de la série pour $-1 < x < 1$ est notée $f(x)$.

1. Etudier la monotonie de l'application f sur $[0, 1[$. En déduire quels sont les comportements possibles de $f(x)$ quand $x \to 1^-$.
2. On suppose maintenant que f a une limite réelle λ en 1^-.
   a) Pour tout $N \in \mathbb{N}$, et tout $x \in \mathbb{R}$, on note $S_N(x) = \sum_{n=0}^{N} a_n x^n$ (on notera que S_N est une fonction polynômiale, définie et continue sur $\mathbb{R}$). Comparer $S_N(x)$ et $f(x)$ lorsque $0 < x < 1$, et en déduire que $S_N(1) \leqslant \lambda$.
   b) En déduire que la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n$ converge, puis que la série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ converge normalement sur $[-1, 1]$.
   c) Montrer précisément que $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \lambda$.

3. On suppose maintenant que $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand quand $x \to 1^-$. Montrer qu'alors, la série $\sum_{n \geqslant 0} a_n$ diverge.

Exercice 11. On considère l'équation fonctionnelle suivante :

$$\forall x \in]-1,1[, \quad f(x) - f(-x) = \frac{2x}{1-x^2}. \tag{E}$$

1. Donner le développement en série entière de la fonction $x \mapsto \frac{x}{1-x^2}$.
2. A quelle(s) condition(s) la somme de la série entière $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n x^n$ est-elle solution de (**??**) ?
3. Expliciter toutes les fonctions impaires développables en série entière qui sont solutions de (**??**).

Exercice 12. Trouver toutes les fonctions développables en série entière solutions de l'équation

$$y'(x) + 2xy(x) = 0, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Exercice 13. [examen, seconde session 2018]

1. Développer en série entière autour de 0 les fonctions $x \mapsto \frac{1}{1-x}$ et $x \mapsto \frac{1}{1+x}$. Préciser les domaines de convergence des séries obtenues.
2. Trouver une solution développable en série entière autour de l'origine de l'équation différentielle :

$$4x^2 y''(x) + 4xy'(x) - y = \frac{x}{1-x}. \tag{E}$$

   Déterminer le rayon de convergence de la série entière obtenue.
3. Montrer que l'application $\varphi : x \in [-1,1] \mapsto \varphi(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{4n^2-1}$ est bien définie et continue.
4. Déterminer des constantes α et β telles que :

$$\forall n \geqslant 1, \quad \frac{1}{4n^2-1} = \frac{\alpha}{2n-1} + \frac{\beta}{2n+1}.$$

5. Montrer que la fonction $u \mapsto \ln \sqrt{\frac{1+u}{1-u}}$ admet pour développement en série entière sur $]-1,1[$: $u \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u^{2n+1}}{2n+1}$.
6. Pour $x \in]0,1[$, on définit $H(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{2n+1}$. Déduire de la question précédente une expression de $H(x)$ à l'aide de fonctions usuelles. On pourra poser $u = \sqrt{x}$.
7. En déduire une expression de $\varphi(x)$ à l'aide de fonctions usuelles.

Exercice 14. [CC du 05/05/2010] Soit la fonction f définie sur $]-1,1[$ par $f(x) = \frac{\ln(1-x)}{x-1}$.

1) Vérifier que pour tout $x \in]-1,1[$, $\quad (1-x)f'(x) - f(x) = \dfrac{1}{1-x} \quad (*)$.

2) On suppose qu'il existe au moins un $s > 0$ et une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de réels telle que $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ pour $x \in]-s,s[$.

a) Montrer grâce à l'équation $(*)$ que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\quad a_{n+1} - a_n = \frac{1}{n+1}$.

b) Après avoir déterminé a_0, en déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de a_n en fonction de n.

c) En déduire le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n \geqslant 0} a_n x^n$.

3) Expliquer pourquoi on a ainsi obtenu le développement en série entière de f sur $]-1,1[$.

4) Retrouver ce résultat en faisant le produit des développements en séries entières de $-\ln(1-x)$ et de $\frac{1}{1-x}$.