**Feuille d'exercices 4**

**Exercice 1.** Trouver les rayons de convergence des séries entières de terme général :

(a) $nz^n$ ; (b) $n!z^n$ ; (c) $\dfrac{z^n}{n!}$ ; (d) $\dfrac{n^n}{n!}z^n$ ; (e) $2^{-n}(1+\frac{1}{n})^{n^2}z^n$.

**Exercice 2.** Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$

(a) si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite bornée ne tendant pas vers 0.

(b) si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite qui tend vers 0, telle que $\sum_{n\geqslant 0} a_n$ diverge.

**Exercice 3.** Soient $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n x^n$ deux séries entières de rayons de convergence $R$ et $R'$, respectivement.

(a) Si à partir d'un certain rang on a $|a_n| \leqslant |b_n|$, montrer l'inégalité $R \geqslant R'$.

(b) Si $|a_n| \sim |b_n|$, montrer qu'elles ont même rayon de convergence.

**Exercice 4.** Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ une série entière. Montrer que les deux séries $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ et $\sum_{n\geqslant 0} |a_n| z^n$ ont même rayon de convergence. Les domaines de convergence sont-ils nécessairement égaux ?

**Exercice 5.** Trouver le rayon de convergence des séries entières dont les termes généraux sont :

(a) $2^n z^{2n}$ , c'est-à-dire la série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ avec $a_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est impair,} \\ 2^{n/2} & \text{si } n \text{ est pair.} \end{cases}$

(b) $a_n z^n$ avec $a_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ est impair,} \\ 2^n & \text{si } n \text{ est pair.} \end{cases}$

**Exercice 6.** Déterminer le rayon de convergence et la somme des séries entières suivantes :

(a) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{x^n}{n(n-1)}$ ; (b) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} n(n+1)x^n$ ; (c) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{3n}{n+2}x^n$ ; (d) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{n^2+n-1}{n!}x^n$.

**Exercice 7.** Séries entières à coefficients positifs.

Soit $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ une série entière ayant des coefficients $a_n$ tous positifs et un rayon de convergence égal à 1. La somme de la série pour $-1 < x < 1$ est notée $f(x)$.

1. Etudier la monotonie de l'application $f$ sur $[0,1[$. En déduire quels sont les comportements possibles de $f(x)$ quand $x \to 1^-$.
2. On suppose maintenant que $f$ a une limite réelle $\lambda$ en $1^-$.
   a) Pour tout $N \in \mathbb{N}$, et tout $x \in \mathbb{R}$, on note $S_N(x) = \sum_{n=0}^{N} a_n x^n$ (on notera que $S_N$ est une fonction polynômiale, définie et continue sur $\mathbb{R}$). Comparer $S_N(x)$ et $f(x)$ lorsque $0 < x < 1$, et en déduire que $S_N(1) \leqslant \lambda$.
   b) En déduire que la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n$ converge, puis que la série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ converge normalement sur $[-1,1]$.
   c) Montrer précisément que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \lambda$.
3. On suppose maintenant que $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand quand $x \to 1^-$. Montrer qu'alors, la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n$ diverge.

**Exercice 8.** Soit $\alpha$ un nombre réel *non entier*. On considère la fonction $f$ définie sur $]-1,1[$ par

$$f(x) = (1+x)^\alpha = e^{\alpha \ln(1+x)}.$$

1) Vérifier que cette fonction $f$ est l'unique solution dans $]-1,1[$ de l'équation différentielle

$$(1+x)f'(x) - \alpha f(x) = 0$$

vérifiant la condition $f(0) = 1$.

2) En déduire un développement en série entière de $f$ au voisinage de 0. Quel est le rayon de convergence de la série obtenue et le domaine de validité du développement obtenu ?

## Contrôle continu du Mercredi 5 Mai 2010

**Autour du cours.** Soit $\sum_{n\geqslant 1} \alpha_n$ une série numérique à coefficients $\alpha_n$ réels absolument convergente. On considère la série trigonométrique $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \alpha_n \cos(nx)$.

1) Montrer que cette série converge pour tout $x$ réel et que sa somme notée $f(x)$ définit une fonction $f$ continue sur $\mathbb{R}$ et $2\pi$-périodique.

2) On rappelle que pour $n \in \mathbb{N}^*$, le coefficient Fourier $a_n$ de $f$ est donné par la formule

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx \, dx.$$

Que vaut $a_n$ en fonction des $\alpha_k$ ? Justifier précisément l'égalité trouvée.

3) Exprimer l'intégrale $\displaystyle\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f^2(x)\, dx$ en fonction de la somme $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n^2$. Justifier précisément l'égalité trouvée. Quel nom porte cette égalité ?

**Exercice 1 :** Déterminer le rayon de convergence $R$ puis la somme pour $x \in ]-R,R[$ de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{2n+1}\, x^{2n+1}$.

**Exercice 2 :**

1) Développer en série entière de la variable $x$ la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{1-x^3}$.

2) En déduire le développement en série entière de $\dfrac{1}{1+x+x^2}$.

**Exercice 3 :** Soit la fonction $f$ définie sur $]-1,1[$ par $f(x) = \dfrac{\ln(1-x)}{x-1}$.

1) Vérifier que pour tout $x \in ]-1,1[$, $\quad (1-x)f'(x) - f(x) = \dfrac{1}{1-x} \quad (*)$.

2) On suppose qu'il existe au moins un $s > 0$ et une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels telle que $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ pour $x \in ]-s,s[$.

a) Montrer grâce à l'équation $(*)$ que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\quad a_{n+1} - a_n = \dfrac{1}{n+1}$.

b) Après avoir déterminé $a_0$, en déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de $a_n$ en fonction de $n$.

c) En déduire le rayon de convergence $R$ de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$.

3) Expliquer pourquoi on a ainsi obtenu le développement en série entière de $f$ sur $]-1,1[$.

4) Retrouver ce résultat en faisant le produit des développements en séries entières de $-\ln(1-x)$ et de $\dfrac{1}{1-x}$.