Feuille d'exercices 3

Exercice 1. Etudier la convergence simple, normale, et uniforme des séries de fonctions $\sum_{n\geq 0} u_n$ de terme général défini par :

1. $u_n(x) = e^{-nx}$, $x \in \mathbb{R}_+$.
2. $u_n(x) = x^n$, $x \in [0,1]$.
3. $u_n(x) = \dfrac{1}{2^n}\sin(3^n x)$, $x \in \mathbb{R}$.
4. $u_n(x) = \dfrac{1}{1+(n-x)^2}$, $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 2. Mêmes questions pour les séries de terme général :

1. $u_n(x) = n^x$, $x \in \mathbb{R}$.
2. $u_n(x) = (-1)^n n^x$, $x \in \mathbb{R}$.
3. $u_n(x) = e^{-n(x^2+1)}$, $x \in \mathbb{R}$.
4. $u_n(x) = \frac{1}{n}\arctan(\frac{x}{n})$, $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 3. Mêmes questions pour les séries de terme général :

1. $u_n(x) = ne^{-nx}$, $x \in \mathbb{R}_+^*$.
2. $u_n(x) = \begin{cases} n^2x(1-nx) & \text{si } x \in [0, \frac{1}{n}], \\ 0 & \text{si } x \in [\frac{1}{n}, 1]. \end{cases}$
3. $u_n(x) = e^{-nx}\sin x$, $x \in \mathbb{R}_+$.
4. $u_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{1+n^2x^2}$, $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 4. On considère la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ de fonctions $u_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définies par

$$u_n(x) = \frac{1}{n + xn^2} \quad (n \geq 1, x \in \mathbb{R}).$$

1. Déterminer le domaine de convergence simple $D \subset \mathbb{R}$ de la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} u_n$.
2. Étudier la convergence normale de la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} u_n$ sur D, puis sur $[a, +\infty[$ pour tout réel $a > 0$.
3. La série de fonctions $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge-t-elle uniformément sur D ?
4. La fonction $f = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ est-elle dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$?
5. Montrer que f est intégrable sur $[1,2]$ et exprimer $\int_1^2 f(t)\,\mathrm{d}t$ comme la somme d'une série numérique.

Exercice 5. Etudier la série de fonctions de terme général suivant :

$$u_n : x \mapsto \frac{1}{n^3 + n^4x^2}, \quad n \geq 1,\ x \in \mathbb{R}.$$

La somme est-elle continue sur $\mathbb{R}$? dérivable sur $\mathbb{R}$?

Exercice 6. Mêmes questions pour la série de terme général

$$v_n : x \mapsto \frac{1}{n^2 + n^4x^2}, \quad n \geq 1,\ x \in \mathbb{R}.$$

Exercice 7. Montrer que la série de fonctions de terme général

$$u_n : x \mapsto \frac{(-1)^n}{2\sqrt{n} + \cos x}\,, \quad n \geq 1,\, x \in \mathbb{R},$$

converge uniformément sur $\mathbb{R}$. Étudier la convergence normale.

Exercice 8. On se propose de montrer que la série de terme général

$$v_n : x \mapsto \frac{\cos(nx)}{\sqrt{n+x}}\,, \quad n \geq 1,\, x \in \mathbb{R},$$

converge uniformément sur l'intervalle $I = [\alpha, 2\pi - \alpha]$, où $0 < \alpha < \pi$.

On se donne $x \in \mathbb{R}$ et $n, p, q \in \mathbb{N}^*$, avec $n \geq p$. On note $S_{p,n}(x) = \displaystyle\sum_{k=p}^{n} \cos(kx)$.

1. Montrer en utilisant $\cos a = \frac{1}{2}(e^{ia} + e^{-ia})$ que si $x \neq 2k\pi$, alors $|S_{p,n}(x)| \leq \dfrac{1}{|\sin(x/2)|}$.
2. Vérifier que $\displaystyle\sum_{n=p}^{p+q} v_n(x) = \sum_{n=p}^{p+q-1} S_{p,n}(x)\Big[\frac{1}{\sqrt{n+x}} - \frac{1}{\sqrt{n+1+x}}\Big] + \frac{S_{p,p+q}(x)}{\sqrt{p+q+x}}$.
3. En déduire que pour tout $x \in I$, $|\displaystyle\sum_{n=p}^{p+q} v_n(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{p+x}} \frac{1}{|\sin(\frac{x}{2})|}$. En déduire le résultat.

Exercice 9. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x > 0$, on pose

$$f(x) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{x(x+1)\ldots(x+n)}\,.$$

1. Montrer que la somme ci-dessus définit une application continue $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$.
2. Exprimer $f(x+1)$ en fonction de $f(x)$ pour tout $x > 0$.
3. Étudier la dérivabilité de f sur $\mathbb{R}_+^*$.
4. Montrer que la fonction f est monotone, et donner un équivalent de $f(x)$ lorsque $x \to 0$, ainsi que lorsque $x \to +\infty$.
5. Tracer le graphe de f.

Exercice 10. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions $u_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ définies par $u_0(x) = 1$ et, si $n \geq 1$,

$$u_n(x) \;=\; \begin{cases} \dfrac{(-1)^n}{n!}(x\,\ln(x))^n & \text{si } x \in\,]0,1]\,, \\ \quad 0 & \text{si } x = 0\,. \end{cases}$$

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, vérifier que u_n est continue sur $[0,1]$.
2. En intégrant par parties, calculer $\int_0^1 u_n(x)\,\mathrm{d}x$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Montrer que la série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge normalement sur $[0,1]$, et calculer sa somme.
4. En déduire que

$$\int_0^1 \frac{1}{x^x}\,\mathrm{d}x \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}\,.$$