MAT 402 - feuille 1

Corrigé partiel

Exercice 4 $\quad g$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, avec : $\forall x \in \mathbb{R},\ g'(x) = 1-3x^2$
$$= (1-\sqrt{3}x)(1+\sqrt{3}x)$$

d'où le tableau de variation sur $[0,1]$:

x	0		$\frac{1}{\sqrt{3}}$		1
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
g	0	$\nearrow$	$\frac{2}{3\sqrt{3}}$	$\searrow$	0

En particulier,

$$\min_{[0,1]} g = 0$$

$$\max_{[0,1]} g = \frac{2}{3\sqrt{3}}$$

A fortiori, $\frac{2}{3\sqrt{3}}$ est un majorant de g sur $B = \mathbb{Q}\cap]0,1[$

$\left(\forall x \in [0,1],\ g(x) \leq \frac{2}{3\sqrt{3}} \text{ donc a fortiori, } \forall x \in \underset{(\subset[0,1])}{B},\ g(x) \leq \frac{2}{3\sqrt{3}} \right)$

et 0 un minorant.

On conclut alors comme dans l'exercice précédent :

$\boxed{\sup}$ • il existe $(r_n)_{n\in\mathbb{N}} \in B^{\mathbb{N}}$ convergeant vers $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$)

et alors $\underset{\underset{g(B)}{\cap}}{g(r_n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \underset{\underset{\frac{2}{3\sqrt{3}}}{\parallel}}{g\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)}$ par continuité de g en $\frac{1}{\sqrt{3}}$

donc $\frac{2}{3\sqrt{3}}$ • est un majorant de $g(B)$
• est limite d'une suite d'éléments de $g(B)$

donc (cours, caractérisation du sup) $\boxed{\frac{2}{3\sqrt{3}} = \sup(g(B))}$ $\overset{\text{def}}{=} \boxed{\sup_B g}$

$\boxed{\inf}$ • $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*} \in B^{\mathbb{N}}$ converge vers 0 donc $\left(g\left(\frac{1}{n}\right)\right)$ cv vers $g(0)=0$

donc 0 • est un minorant de $g(B)$
• est limite d'une suite d'élts de $g(B)$) donc $\boxed{0 = \inf_B g}$

Exercice 5 Fixons $i_0 \in \mathbb{N}$ quelconque.

Soit $j \in \mathbb{N}$. $u_{i_0,j} \leq \sup_{i \in \mathbb{N}} u_{i,j}$ (puisque $u_{i_0,j} \in \{u_{i,j}, i \in \mathbb{N}\}$ dont on prend le sup !)

(Rq si f et g sont des fonctions définies sur $A \subset \mathbb{R}$ tq $\forall x \in A$, $f(x) \leq g(x)$, alors $\sup_A f \leq \sup_A g$)

Exo

On applique ceci à $f(j) = u_{i_0,j}$ et $g(j) = \sup_{i \in \mathbb{N}} u_{i,j}$ et on obtient

$$\sup_{j \in \mathbb{N}} u_{i_0,j} \leq \sup_{j \in \mathbb{N}} \left(\sup_{i \in \mathbb{N}} u_{i,j} \right) =: M$$

Ceci étant vrai pour tout $i_0 \in \mathbb{N}$, M majore $\underbrace{\left\{ \sup_{j \in \mathbb{N}} u_{i_0,j} \ , i_0 \in \mathbb{N} \right\}}_{B}$,

donc $\sup(B) \leq M$, ie $\sup_{i_0 \in \mathbb{N}} \left(\sup_{j \in \mathbb{N}} u_{i_0,j} \right) \leq \sup_{j \in \mathbb{N}} \left(\sup_{i \in \mathbb{N}} u_{i,j} \right)$

ou encore (i_0 étant une variable muette, remplaçable par ce qu'on veut)

$$\sup_{i \in \mathbb{N}} \left(\sup_{j \in \mathbb{N}} u_{i,j} \right) \leq \sup_{j \in \mathbb{N}} \left(\sup_{i \in \mathbb{N}} u_{i,j} \right)$$

Par symétrie, on obtient l'inégalité opposée, ce qui donne finalement l'égalité voulue.

⚠ Ça ne marche pas si on mélange des <u>sup</u> et des <u>inf</u> !

Exercice 7 1. But montrer que $\limsup (a_n + u_n) = a + L$

Soit $\varepsilon > 0$ Par convergence de $\left(s_n = \sup \{ u_k, k \geq n \} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ vers L et de (a_n) vers a,

- $\exists N_1 \in \mathbb{N}, \ \forall n \geq N_1, \quad L - \varepsilon \leq s_n \leq L + \varepsilon$
- $\exists N_2 \in \mathbb{N}, \ \forall n \geq N_2, \quad a - \varepsilon \leq a_n \leq a + \varepsilon$

Soient N_1 et N_2 comme ci-dessus, et posons $N = \max(N_1, N_2)$.

Soit $m \geq N$. $\forall k \geq m$, (donc $\geq N_\varepsilon$), $a-\varepsilon+u_k \leq a_k+u_k \leq a+\varepsilon+u_k$

donc

$$\sup_{k\geq m}\left(u_k+(a-\varepsilon)\right) \leq \sup_{k\geq m}(a_k+u_k) \leq \sup_{k\geq m}\left(u_k+(a+\varepsilon)\right)$$

(On utilise la même remarque que dans l'exercice 5)

Nouvelle remarque/exo Si f est une fonction majorée sur $A\subset\mathbb{R}$ et c une constante, $\sup_A(f+c)=\left(\sup_A f\right)+c$ (à peu près évident).

Ici cela donne $\left(\sup_{k\geq m} u_k\right)+(a-\varepsilon) \leq \left(\sup_{k\geq m}(a_k+u_k)\right) \leq \left(\sup_{k\geq m} u_k\right)+(a+\varepsilon)$

On peut alors passer à la limite qd $m\to+\infty$ et on obtient :

$$L+(a-\varepsilon) \leq \limsup(a_n+u_n) \leq L+(a+\varepsilon)$$

ie $$\left|\limsup(a_n+u_n)-(L+a)\right| \leq \varepsilon$$

Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon>0$, on a finalement

$$\boxed{\limsup(a_n+u_n) = a+L} \quad (=\lim(\sup)\,a_n+\limsup u_n)$$

---

2. On a vraiment utilisé le fait que $(a_n)_n$ était "presque constante" à partir d'un certain rang. L'argument ne marche plus du tout si (a_n) est seulement bornée : prendre $(a_n)_n=((-1)^n)_n$ et $(u_n)=(-(-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$

$\limsup u_n =$ sa plus gde valeur d'adhérence $=1$

de même, $\limsup a_n = 1$

Mais $(a_n+u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite nulle, qui en particulier CV vers 0 donc sa limsup est $0 \neq 1+1$.

---

3. <u>But</u> $\limsup(e^{u_n}) = e^{(\limsup u_n)} = e^L$

⚠ ça ne marche pas avec n'importe quelle fonction !!

Soit $n \in \mathbb{N}$. <u>Affirmation</u>: $\sup\{e^{u_k}, k \geq n\} = e^{\sup\{u_k, k\geq n\}}$ (*)

ie $\sup\{e^x, x \in X_n\} = e^{\sup X_n}$

Ceci serait vrai pour n'importe quel sous-ensemble A de $\mathbb{R}$ <u>majoré</u> à la place de X_n, et cela découle de la <u>croissance</u> et de la <u>continuité</u> de exp, comme dans l'exercice 3.

<u>Vérifions-le</u> : <u>But</u> $\sup_A \exp = \exp(\sup A)$

- soit $x \in A$. Alors $x \leq \sup(A)$.
  Donc par <u>croissance</u> de exp sur $\mathbb{R}$, $e^x \leq \underline{e^{\sup A}}$ donc majorant de exp sur A donc :
  $\sup_A(\exp) \leq \exp(\sup A)$
- $\exists (x_n) \in A^{\mathbb{N}}$ convergeant vers sup A
  Mais alors par continuité de exp en sup A, $\underbrace{e^{x_n}}_{\in \exp(A)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{\sup A}$

<u>Bilan</u> exp(sup A) est un majorant de exp(A) et est limite d'éléments de exp(A), c'est donc sup(exp(A)), ie $\sup_A \exp$.

Retour à l'exercice : Le terme de gauche de (*) tend vers $\limsup e^{u_n}$ qd $n \to +\infty$. Celui de droite tend vers $e^{\limsup u_n}$ car l'exposant tend vers $\limsup u_n$ et, encore une fois l'exponentielle est <u>continue</u>.

Par indentification, on obtient bien le résultat voulu.

⚠ Trouver un contre exemple à "$\limsup f(u_n) = f(\limsup u_n)$" dans le cas où f n'est pas croissante ou pas continue.

Exercice 11 1. n_0 étant fixé, posons $\alpha = a_1 + \dots + a_{n_0} \in \mathbb{R}$. La suite considérée est alors $\left(\frac{\alpha}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$, qui tend vers 0 qd $n \to +\infty$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $b_n - \ell = \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k\right) - \ell$

$$= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k - \frac{1}{n}\times(n\ell)$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ell$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(a_k - \ell)$$

3. $\forall i \in [\![1,k]\!]$, $-\varepsilon < x_i < \varepsilon$, donc par sommation :

$$-k\varepsilon < \sum_{i=1}^{k} x_i < k\varepsilon$$

et par division par un entier $n > 0$,

$$-\frac{k}{n}\varepsilon < \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} a_i < \frac{k}{n}\varepsilon$$

et si en outre $n \geqslant k$, alors $\frac{k}{n}\varepsilon \leqslant \varepsilon$ $\left(\text{et } -\varepsilon \leq -\frac{k}{n}\varepsilon\right)$ et on obtient l'encadrement voulu.

4. Soit $\varepsilon > 0$. et $n_0 \in \mathbb{N}$ tq $\forall k \geqslant n_0$, $|a_k - \ell| < \frac{\varepsilon}{2}$

Soit $n \geqslant n_0$

$$b_n - \ell = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(a_k - \ell)$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n_0}(a_k - \ell) + \underbrace{\frac{1}{n}\sum_{k=n_0+1}^{n}\overbrace{(a_k - \ell)}^{\in]-\frac{\varepsilon}{2},\frac{\varepsilon}{2}[}}$$

$$= \underbrace{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-n_0}\underbrace{(a_{n_0+i} - \ell)}_{=: x_i \in]-\frac{\varepsilon}{2},\frac{\varepsilon}{2}[}}_{\in]-\frac{\varepsilon}{2},\frac{\varepsilon}{2}[\text{ d'après 3. appliqué à } k = n-n_0 \text{ et } n = n \geqslant k}$$

Soit maintenant $n_1 \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq n_1$, $\left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n_0} (a_k - l) \right| < \frac{\varepsilon}{2}$

(existe d'après le même arg^t que la question 1)

Alors $\forall n \geq \underbrace{\max(n_0, n_1)}_{N}$, $b_n - l \in]-\varepsilon, \varepsilon[$.

On a donc montré que : $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |b_n - l| < \varepsilon$,

ie que $(b_n - l)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers l.

5. <u>Non</u> prendre $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} = ((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}^*}$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $b_n = \begin{cases} \frac{-1}{n} & \text{si } n \text{ impair} \\ 0 & \text{si } n \text{ pair} \end{cases}$ (à vérifier)

Donc $b_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ mais $a_n \not\xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.

6. Si $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$, alors (b_n) aussi.

<u>Preuve</u> Soit $A \in \mathbb{R}$, $n_0 \in \mathbb{N}$ tq $\forall k \geq n_0$, $a_k \geq A$ $(*)$

et $n_1 \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq n_1$, $\left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n_0} a_k \right| < 1$

Alors $\forall n \geq n_2 = \max(n_0, n_1)$,

$$b_n = \underbrace{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n_0} a_k}_{\geq -1} + \underbrace{\frac{1}{n} \underbrace{\sum_{k=n_0+1}^{n} \underbrace{a_k}_{\geq A}}_{\geq (n-n_0) A}}_{\geq \frac{n-n_0}{n} A}$$

il existe $n_3 \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq n_3$, $\frac{n-n_0}{n} \geq \frac{1}{2}$ (car $\frac{n-n_0}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$)

Finalement , $\forall n \geq N = \max(n_2, n_3)$, $b_n \geq \frac{A}{2} - 1$

Si l'on avait mis $2A+2$ à la place de A dans $(*)$, (ce que l'on fait rétrospectiv^t)

on aurait obtenu : $\forall A \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, b_n \geq A$, ie $\lim_{n \to +\infty} b_n = +\infty$

Exercice 12 1. $\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 \leq u_n 10^{-n} \leq 9.10^{-n}$

or $\left(\sum_n 9.10^{-n}\right)$ CV (série géométrique de raison $10^{-1} \in]-1,1[$) donc par comparaison de séries à TG positifs, $\left(\sum u_n 10^{-n}\right)$ CV également.

2. C'est vrai plus généralement pour toute suite à valeurs dans $\mathbb{N}$.
Redémontrons le : Supposons que (u_n) cv vers $l \in \mathbb{R}$.
En posant $\varepsilon = \frac{1}{2} > 0$, on obtient l'existence de $N \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq N$, $|u_n - l| < \frac{1}{2}$,

ie $u_n \in]l-\frac{1}{2}, l+\frac{1}{2}[$. Or cet intervalle contient au plus un entier K,

donc comme u_n est entier, $\forall n \geq N$, $u_n = K$, ie (u_n) est constante à partir d'un certain rang.

3. Supposons que (u_n) cv vers 9. Alors (u_n) est constante à partir d'un certain rang d'après la question précédente, et la constante est nécessairement 9.
On note N le + petit rang à partir duquel $u_n = 9$.

$$\text{Donc} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} u_n 10^{-n} = \underbrace{\sum_{n=0}^{N-1} u_n 10^{-n}}_{0 \text{ si } N=0} + \underbrace{\sum_{n=N}^{+\infty} 9.10^{-n}}$$

$$= 9. \sum_{n=N}^{+\infty} 10^{-n}$$

$$= 9. \frac{10^{-N}}{1-10^{-1}}$$

$$= 10^{-N}. 9. \frac{1}{1-\frac{1}{10}}$$

$$= 10^{-N}. \frac{9}{\frac{9}{10}} = 10^{-N+1}$$

$$= \underbrace{\sum_{n=0}^{N-2} u_n . 10^{-n}}_{0 \text{ si } N \leq 1} + (\underbrace{u_{N-1}+1}_{\in [0,9] \text{ car } u_{N-1} < 9 \text{ par hypothèse}})10^{-(N-1)} + 0$$

(= 10 simplement si $N=0$)

Donc en posant $v_n = \begin{cases} u_n & \text{si } n \leq N-2 \\ u_n + 1 & \text{si } n = N-1 \\ 0 & \text{si } n \geq N \end{cases}$, on a bien $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in D^{\mathbb{N}}$

convergeant vers 0 et telle que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n 10^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n . 10^{-n}$

4) <u>Unicité</u> supposons qu'il existe $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in D^{\mathbb{N}}$ distinctes ne convergeant pas vers 9 telles que $x = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n 10^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n 10^{-n}$

Soit n_0 le premier indice où u_n et v_n diffèrent.

SPDG, on peut supposer que $u_n < v_n$, ie $u_n \leq v_n - 1$ puisque u_n et v_n sont des entiers.

Alors
$$x = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \cdot 10^{-n} = \underbrace{\sum_{n=0}^{n_0-1} u_n 10^{-n}}_{=\sum_{n=0}^{n_0-1} v_n 10^{-n} \text{ par déf de } n_0} + \underbrace{u_{n_0} 10^{-n_0}}_{\leq (v_{n_0}-1)10^{-n_0}} + \underbrace{\sum_{n=n_0+1}^{+\infty} u_n 10^{-n}}_{< \sum_{n=n_0+1}^{+\infty} 9 \cdot 10^{-n} = 10^{-n_0}}$$

car au moins un u_n est <9

$$< \sum_{n=0}^{n_0} v_n 10^{-n} \leq \sum_{n=0}^{+\infty} v_n \cdot 10^{-n} = x$$

absurde.

Ceci montre l'unicité.

<u>Existence</u> Idée : $x = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n 10^{-n}$ signifie que l'écriture décimale de x est $u_0, u_1 u_2 u_3 \dots\dots$

Voici comment trouver ces décimales à partir de x :

$u_0 = [x]$ (partie entière de x) $\in [0,9]$ car $x \in [0,10[$

$u_1 = \left[10.(x - u_0) \right]$

$$\left(\underbrace{\underbrace{\overbrace{0, u_1 u_2 \dots}}_{u_1, u_2 u_3 \dots}}_{u_1} \right) \leftarrow \text{idée}$$

et par récurrence : $u_n = \Big[\underbrace{10^n x - \sum_{k=0}^{n-1} u_k 10^{n-k}}_{u_0 u_1 \dots u_n, u_{n+1} \dots \; - \; u_0 u_1 \dots u_{n-1} 0, 0 \dots 0 \; = u_n, u_{n+1} \dots} \Big]$

Par construction, $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq 10^n x - \sum_{k=0}^{n-1} u_k 10^{n-k} - u_n < 1$

$$\text{donc} \quad 0 \leq x - \sum_{k=0}^{n} u_k 10^{-k} < \frac{1}{10^n}$$

$$\text{donc} \left(\sum_k u_k 10^{-k}\right) \text{CV et} \sum_{k=0}^{+\infty} u_k 10^{-k} = x$$

par encadrement

De plus, comme $\quad 0 \leq x - \sum_{k=0}^{n-1} u_k 10^{-k} < \frac{1}{10^{n-1}}$,

$$0 \leq 10^n x - \sum_{k=0}^{n-1} u_k 10^{n-k} < 10$$

donc $0 \leq u_n = \lfloor 10^n x - \sum \dots \rfloor \leq 9$, donc (u_n) est bien à valeurs dans D.

Enfin, on pourrait vérifier que cette suite ne cv pas vers 9, mais ce n'est pas nécessaire ici car si tel était le cas, la question 3 nous donnerait une autre suite (v_n) qui conviendrait.

Exercice 13 Plus rigoureusement, la série étudiée est $\left(\sum_{n \in \mathbb{N}^*} u_n\right)$

où $u_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{si } n \in A \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

C'est une série à termes positifs donc pour montrer sa convergence, il suffit de montrer que la suite de ses sommes partielles $(S_n)_{n \geq 1}$ est majorée. Pour cela suivons l'indication de l'énoncé.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Les éléments de $A \cap [10^n, 10^{n+1}[$ sont les entiers dont l'écriture en base 10 est de la forme $a_n \dots a_1 a_0$

avec $\cdot\ a_i \in \underbrace{[\![0,9]\!] \setminus \{2\}}_{9 \text{ éléments}}, \forall i \in [\![0,n]\!]$

$\cdot\ a_n \neq 0$

Cela fait $8 \times (9^n)$ possibilités

or $\forall k \in [\![10^n, 10^{n+1}[\![, 0 \leq u_k \leq \frac{1}{10^n}$ (avec $u_k = 0$ si $k \notin A$)

Ainsi $\sum_{k=10^n}^{10^{n+1}-1} u_k \leq 8 \cdot 9^n \times \frac{1}{10^n} = 8\left(\frac{9}{10}\right)^n$

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}$, $S_{10^{n+1}} = \sum_{k=1}^{10^{n+1}-1} u_k$

$$= \sum_{k=10^0}^{10^1-1} u_k + \dots + \sum_{k=10^n}^{10^{n+1}-1} u_k$$

$$\leq 8\left(\frac{9}{10}\right)^0 + \dots + 8\left(\frac{9}{10}\right)^n$$

$$= 8 \underbrace{\sum_{j=0}^{n}\left(\frac{9}{10}\right)^j}$$

somme partielle d'une série géométrique convergente, de somme $\frac{1}{1-\frac{9}{10}} = 10$

$$\leq 80$$

Mais alors $\forall m \in \mathbb{N}^*$, $\exists n \in \mathbb{N}$ tq $m \leq 10^{n+1}$, et alors $S_m \leq S_{10^{n+1}} \leq 80$

Ainsi la suite $(S_m)_{m\in\mathbb{N}^*}$ est majorée, ce qu'on voulait.

Exercice 14 1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ (l'énoncé aurait dû le préciser).

$$\ln \frac{P_n(a)}{n!\, n^{a-1}} = \ln(P_n(a)) - \ln n! - \ln(n^{a-1})$$

$$= \ln P_n(a) - \sum_{k=1}^{\cancel{n}\, n-1} \ln(k) - (a-\cancel{1})\ln(n) = \ln P_n(a) - \sum_{k=1}^{n-1}\ln(k) - a\ln n$$

or $\forall k \in \mathbb{N}$, $P_{k+1}(a) = (k+a)P_k(a)$ donc $\ln(P_{k+1}(a)) = \ln(k+a) + \ln(P_k(a))$

donc par une récurrence immédiate,

$$\ln(P_n(a)) = \sum_{k=0}^{n-1}\ln(k+a) + \underbrace{\ln(P_0(a))}_{0}$$

En outre, $\ln n = \ln\Big(\underbrace{\prod_{k=1}^{n-1}\frac{k+1}{k}}_{n}\Big) = \sum_{k=1}^{n-1}\left(\ln(k+1) - \ln(k)\right)$

Ainsi, $\ln \frac{P_n(a)}{n!\, n^{a-1}} = \sum_{k=0}^{n-1}\ln(k+a) - \sum_{k=1}^{n-1}\ln(k) - a\sum_{k=1}^{n-1}\left(\ln(k+1) - \ln(k)\right)$

$$= \sum_{k=0}^{n-1}\ln(k+a) - a\sum_{k=1}^{n-1}\ln(k+1) + (a-1)\sum_{k=1}^{n-1}\ln(k)$$

$$= \ln(a) + \sum_{k=1}^{n-1} u_k$$

$$u_n = \ln\left(n \times \left(1+\frac{a}{n}\right)\right) - a\ln\left(n \times \left(1+\frac{1}{n}\right)\right) + (a-1)\ln(n)$$

$$= \cancel{\ln n} + \ln\left(1+\frac{a}{n}\right) - \cancel{a\ln(n)} - a\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + \cancel{(a-1)\ln(n)}$$

$$= \cancel{\frac{a}{n}} - \frac{a^2}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) - a\left(\cancel{\frac{1}{n}} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$$

$$= \frac{-a^2+a}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{-a^2+a}{2n^2}$ si $-a^2+a \neq 0$, ie si $a \neq 1$

et $u_n = o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ si $a=1$

Dans les deux cas, $\left(\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2}\right)$ CV (Riemann) donc par comparaison de séries de TG de signe constant (le signe de $-a^2+a$ dans le 1er cas) $\left(\sum u_n\right)$ CV également.

3. Ainsi, si $\underset{\mathbb{R}}{\overset{\cap}{S}}$ désigne $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$, d'après 1), $\ln \dfrac{P_n(a)}{n!\, n^{a-1}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ln a + S$

Donc par continuité de l'application exponentielle au point $\ln(a)+S \in \mathbb{R}$,

$$\frac{P_n(a)}{n!\, n^{a-1}} = \exp\left(\ln\left(\frac{P_n(a)}{n!\, n^{a-1}}\right)\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \exp(\ln a + S) > 0$$

Ce qui donne le résultat voulu.