Feuille d'exercices 1

Exercice 1. Donner la borne supérieure et la borne inférieure (si elles existent) de l'ensemble $D = \left\{\frac{n^2-1}{n^2+1},\ n \in \mathbb{N}^*\right\}$. Cet ensemble admet-il un plus grand élément, un plus petit élément ?

Exercice 2. Soit $A = \{x \in \mathbb{Q} | x < \sqrt{2}\} \subset \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et croissante.
Déterminer la borne supérieure $\sup f(A)$ où $f(A) = \{f(x),\ x \in A\}$. (Commencer par $f(x) = x$.)

Exercice 3. Soit $B = \mathbb{Q} \cap]0,1[$. On considère la fonction $g : x \mapsto x - x^3$. Déterminer la borne supérieure et la borne inférieure de $g(B)$ dans $\mathbb{R}$.

Exercice 4. Soient A et B deux parties non vides et majorées de $\mathbb{R}$. Démontrer l'égalité $\sup(A \cup B) = \max(\sup A, \sup B)$. Si $A \subset B$, montrer $\sup A \leqslant \sup B$.

Exercice 5. Soit $(u_{i,j})_{i,j \in \mathbb{N}}$ une suite numérique dépendant de deux paramètres.
Montrer que $\sup\limits_{i \in \mathbb{N}}\big(\sup\limits_{j \in \mathbb{N}}(u_{i,j})\big) = \sup\limits_{j \in \mathbb{N}}\big(\sup\limits_{i \in \mathbb{N}}(u_{i,j})\big)$.

Exercice 6. Soit A une partie de $\mathbb{R}$ possédant une borne supérieure.

1. Montrer que pour tout $t < \sup A$, on a $A \cap]t, \sup A] \neq \emptyset$.
   De même pour tout $t > \inf A$, on a $A \cap [\inf A, t[\neq \emptyset$.
2. Que peut-on dire sur $A \cap]t, \sup A[$?
3. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $t \geqslant \sup A \Leftrightarrow t$ est un majorant de A.
4. L'assertion suivante est-elle vraie ? $\forall t \in \mathbb{R},\ (t > \sup A \Leftrightarrow (\forall a \in A,\ t > a))$.

Exercice 7. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite numérique bornée.
Pour $n \in \mathbb{N}$ on note $X_n = \{u_k, k \geqslant n\}$, et $s_n = \sup X_n$.

1. Montrer que $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante
2. Montrer que $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente. On note sa limite $\limsup u_n$.
3. Définir par analogie la limite inférieure $\liminf u_n$.
4. Montrer que, si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ℓ, alors $\liminf u_n = \limsup u_n = \ell$.
5. Montrer que si $\liminf u_n = \limsup u_n$, alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers leur valeur commune.
6. Déterminer $\limsup u_n$ et $\liminf u_n$ pour la suite de terme général $u_n = \cos(2\pi n/3)$.

Exercice 8. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite bornée de réels. On pose $L = \limsup u_n$.

1. Soit une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergeant vers a. Déterminer $\limsup(a_n + u_n)$ en fonction de a et de L.
2. Si $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est seulement bornée, a-t-on $\limsup(a_n + u_n) = \limsup a_n + \limsup u_n$?
3. Déterminer $\limsup e^{u_n}$ en fonction de L.

Exercice 9. Soit une application f de $[0,1]$ dans $[0,1]$, croissante. On se propose de montrer qu'il existe un point fixe de f, c'est-à-dire un $x \in [0,1]$ tel que $f(x) = x$. (Note : f n'est pas supposée continue. Un exercice classique est que le résultat est vrai si on remplace le mot “croissante” par le mot “continue” dans l'hypothèse.)

Pour démontrer le résultat, on considère l'ensemble A des $x \in [0,1]$ tels que $f(x) \leqslant x$.

a) Montrer que l'ensemble A n'est pas vide et qu'il a une borne inférieure, qu'on notera α, avec $\alpha \in [0,1]$. La suite de l'exercice consiste à montrer que α est un point fixe de f.

b) Exploiter la croissance de f pour démontrer :

i) Si $x \in [0,1]$ est un minorant de A, alors $f(x)$ est aussi un minorant de A.

ii) Si $x \in [0,1]$ est un élément de A, alors $f(x)$ est aussi un élément de A.

c) En appliquant le résultat i) précédent au cas $x = \alpha$, montrer que $f(\alpha) \leqslant \alpha$, autrement dit, que $\alpha \in A$.
En appliquant alors le ii) précédent au cas $x = \alpha$, montrer que $f(\alpha) \geqslant \alpha$, et conclure.

Exercice 10. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. Montrer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses :

1. La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0 si et seulement si la suite $(|a_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0.
2. Si la suite $(|a_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers une limite l, alors la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers l ou $-l$.
3. Si la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers une limite l, alors la suite $(|a_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $|l|$.

Exercice 11. (Cesaro) Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite réelle. On veut montrer que si la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge, vers une limite l, alors la suite des moyennes arithmétiques $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par
$b_n = \dfrac{1}{n}(a_1 + ... + a_n)$ converge également, vers la même limite l.

1. Pour tout $n_0 \in \mathbb{N}$, que peut-on dire de la suite $(\dfrac{1}{n}(a_1 + ... + a_{n_0}))_{n\in\mathbb{N}}$?
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer $b_n - l$ en fonction des $a_i - l$, avec $i = 1, ..., n$.
3. Soit $\epsilon > 0$ et des réels x_1,..., x_k tels que $x_1, ..., x_k \in]-\epsilon, +\epsilon[$. Montrer pour tout entier $m \geqslant k$, on a $\dfrac{1}{m}(x_1 + ... + x_k) \in]-\epsilon, +\epsilon[$.
4. Montrer que si la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite finie l, alors la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge également vers l.
5. La réciproque est-elle vraie ?
6. Que peut-on dire si la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tend vers $+\infty$?

Exercice 12. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans l'ensemble $D = \{0, 1, \dots, 9\}$.

1. Montrer que la série de terme général $u_n \cdot 10^{-n}$ converge vers un réel $x \in [0, 10]$.
2. Montrer que si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 9, il existe une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de D convergeant vers 0 telle que $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$.
3. Pour tout $x \in [0, 10[$, montrer qu'il existe une unique suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne convergeant pas vers 9 telle que $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = x$.

Exercice 13. Déterminer la nature des séries de terme général u_n, $n \geqslant 1$, défini par :

1) $u_n = \dfrac{1}{(n+1)!}$ 2) $u_n = \dfrac{4^n}{n!}$ 3) $u_n = \dfrac{n^n}{3^{1+2n}}$ 4) $u_n = e^{-n^3-n}$

5) $u_n = \dfrac{n^{n+1}}{n!}\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$ 6) $u_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n - e$ 7) $u_n = (-1)^n \sin\dfrac{1}{n}$ 8) $u_n = \dfrac{2^n}{(n+2)3^{n+1}}$

Exercice 14. On considère la série $\displaystyle\sum_{n\in A}\frac{1}{n}$ où A est l'ensemble des entiers ne contenant pas le chiffre 2 dans leur écriture en base 10. En évaluant pour tout entier n le nombre de termes dans $A \cap [10^n, 10^{n+1}[$, étudier la nature de cette série.

Exercice 15. Soit $a > 0$ fixé.
Pour n entier positif ou nul on définit $P_n(a)$ par $P_0(a) = 1$, $P_1(a) = a$, $P_2(a) = a(a+1)$ et plus généralement $P_{n+1}(a) = (n+a)P_n(a)$. Il s'agit de montrer que

$$L(a) = \lim_{n\to\infty} \frac{P_n(a)}{n! n^{a-1}}$$

existe et est un nombre strictement positif.
Pour ce faire, on considère la série de terme général u_n, $n \geqslant 1$, défini par

$$u_n = \ln(n+a) - a\ln(n+1) + (a-1)\ln n.$$

1. Comparer la somme partielle d'ordre $n-1$ de $\sum u_n$ avec $\ln\dfrac{P_n(a)}{n!n^{a-1}}$.
2. A l'aide d'un développement limité en $1/n$ d'ordre convenable montrer que $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge.
3. Conclure.