MAT 402 _ TD5

Exercice 1 a) On va mettre la fonction donnée sous forme d'un polynôme trigonométrique et on la traitera alors grâce à la réponse à la seconde question.

Notons f la fonction considérée (de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, C^∞ et 2π-périodique)

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad f(x) = (\cos(x))^4 = \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^4 = \frac{1}{2^4}\left(\sum_{k=0}^{4}\binom{4}{k}(e^{ix})^k(e^{-ix})^{4-k}\right)$$

(formule du binôme)

$$= \frac{1}{2^4}\Big(1.(e^{ix})^0(e^{-ix})^4 + 4\underbrace{e^{ix}(e^{-ix})^3}_{= e^{-3ix}} + \binom{4}{2}(e^{ix})^2(e^{-ix})^2 + 4(e^{ix})^3e^{-ix} + 1.(e^{ix})^4\Big)$$

$$= \frac{1}{2^4}\left(\left(e^{-i4x}+e^{i4x}\right) + 4\left(e^{-2ix}+e^{2ix}\right) + \frac{4!}{(2!)^2}\right)$$

$$= \frac{1}{8}\cos(4x) + \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{3}{8}$$

$$= \frac{3}{8} + \sum_{k=1}^{4}\left(a_k\cos(kx) + 0.\sin(kx)\right) \quad \text{avec } a_1 = 0 = a_3,\ a_2 = \frac{1}{2},\ a_4 = \frac{1}{8}$$

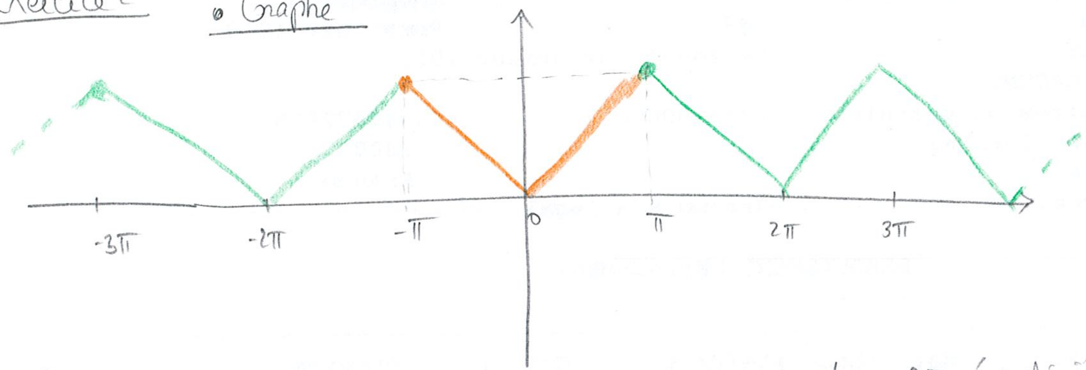
b) Etant donné un polynôme trigonométrique $f = \alpha + \sum_{k=1}^{d} a_k\cos_k + b_k\sin_k$, ses coeff. de Fourier sont $a_0(f) = 2\alpha$, $\forall k \in [\![1,d]\!], a_k(f) = a_k, b_k(f) = b_k$
$\forall k > d,\ a_k(f) = b_k(f) = 0$

Autrement dit, sa série de Fourier est $\left(\alpha + \sum_{k\in\mathbb{N}} a_k\cos_k + b_k\sin_k\right)$ en posant, pour $k>d$, $a_k = b_k = 0$.

En particulier, la série de Fourier de la fonction f du a) est $\left(\alpha + \sum_{k\in\mathbb{N}} a_k\cos_k\right)$ avec $\alpha = \frac{3}{8}$, $a_2 = \frac{1}{2}$, $a_4 = \frac{1}{8}$ et $\forall k \in \mathbb{N}\setminus\{0,2,4\}$, $a_k = 0$.

(En particulier, cette série de fonction converge simplement sur $\mathbb{R}$ et sa somme est égale à f.)

Exercice 2 • Graphe



(On trace le graphe de f sur $[-\pi,\pi[$ et on étend par 2π périodicité)
On remarque que $f(x) = |x|$ $\forall x \in [-\pi,\pi]$ en fait.

• coefficients f est paire (elle l'est sur $[-\pi, \pi]$, et on le déduit sur $\mathbb{R}$ par périodicité : Soit $x \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{Z}$ tq $x-2k\pi \in [-\pi,\pi[$. Alors

$$f(-x) \underset{\substack{\uparrow \\ 2\pi \text{ per.}}}{=} f(-x+2k\pi) = f(-(x-2k\pi)) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{parité sur } [-\pi,\pi[}}{=} f(x-2k\pi) \underset{\substack{\uparrow \\ 2\pi \text{ per.}}}{=} f(x)\Big)$$

donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $b_n(f) = 0$ et

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \boxed{a_n(f)} = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \underset{\parallel}{f(t)}\cos(nt)\,dt$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi t\cos(nt)\,dt$$

si $n \in \mathbb{N}^*$
IPP $u : t \mapsto t$
$v : t \mapsto \frac{\sin(nt)}{n}$

$$= \frac{2}{\pi}\Bigg(\underbrace{\left[t\frac{\sin(nt)}{n}\right]_0^\pi}_{\substack{0 \\ \text{car } \sin(x)=0 \\ \forall x \in \pi\mathbb{Z}}} - \int_0^\pi \frac{\sin(nt)}{n}\,dt\Bigg)$$

$$= -\frac{2}{\pi n}\left[-\frac{\cos(nt)}{n}\right]_0^\pi$$

$$= \frac{2}{\pi n^2}\left(\cos(n\pi) - \cos 0\right) = \frac{2}{\pi n^2}\left((-1)^n - 1\right) = \boxed{\begin{cases} 0 \text{ si } n \text{ pair} \\ -\frac{4}{\pi n^2} \text{ si } n \text{ impair}\end{cases}}$$

Pour $n=0$, $\underline{a_0(f)} = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi t\,dt = \frac{2}{\pi}\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^\pi = \underline{\pi}$

(vérification : $\frac{a_0(f)}{2}$ doit être la moyenne de f sur $[-\pi,\pi]$, ou sur $\mathbb{R}$.. C'est bien cohérent ici)

Ainsi, la série de Fourier S_f de f est $\left(\frac{\pi}{2} + \sum_{k\in\mathbb{N}} a_{2k+1}(f)\cos_{2k+1}\right) = \left(\frac{\pi}{2} - \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{4}{\pi(2k+1)^2}\cos_{2k+1}\right)$

- Théorèmes de convergence : a) f est C^1 par morceaux sur $[-\pi,\pi]$ (car affine sur $[-\pi,0]$ et $[0,\pi]$) donc sur $\mathbb{R}$. En outre f est continue sur $[-\pi,\pi]$ donc sur $\mathbb{R}$.

On peut donc lui appliquer le thm de CVN : S_f CVN vers f sur $\mathbb{R}$. En particulier, on a convergence simple, donc en 0, on obtient :

$$\left(\frac{\pi}{2} - \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{4}{\pi(2k+1)^2}\cos((2k+1).0)\right) \text{ cv vers } f(0)=0, \text{ donc}$$

$$\frac{\pi}{2} = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}, \text{ et donc } \boxed{\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}}$$

Par ailleurs, on sait que $\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{n^2}$ converge, ainsi que $\sum_{k\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{(2k)^2}$ et $\sum_{k\in\mathbb{N}}\frac{1}{(2k+1)^2}$

et on a $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(2k)^2} + \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}$ (scission en termes de rang pair et termes de rang impair)

$$= \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2} + \frac{\pi^2}{8} \quad \text{d'après ce qui précède}$$

Ainsi $\underbrace{\left(1-\frac{1}{4}\right)}_{\frac{3}{4}}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}\right) = \frac{\pi^2}{8}$, ce qui donne le résultat bien connu :

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}}$$

b) f est C^0_{pm} 2π périodique donc on peut également lui appliquer l'égalité de Parseval :

$$\underbrace{\frac{a_0(f)^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(f)^2 \big(+\underbrace{b_n(f)}_{0}\big)^2}_{A} = \underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f(t))^2\,dt}_{B}$$

Or $A = \frac{\pi^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{+\infty}(a_{2k+1}(f))^2 = \frac{\pi^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{-4}{\pi(2k+1)^2}\right)^2 = \frac{\pi^2}{4} + \frac{8}{\pi^2}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(2k+1)^4}$.

et $B = \frac{1}{2\pi}\times\underbrace{2\int_0^{\pi}}_{\text{(parité)}} t^2\,dt = \frac{1}{\pi}\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{3}$

Ainsi, $\boxed{\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^4}} = \frac{\pi^2}{8}\left(\frac{\pi^2}{3} - \frac{\pi^2}{4}\right) \boxed{= \frac{\pi^4}{96}}$

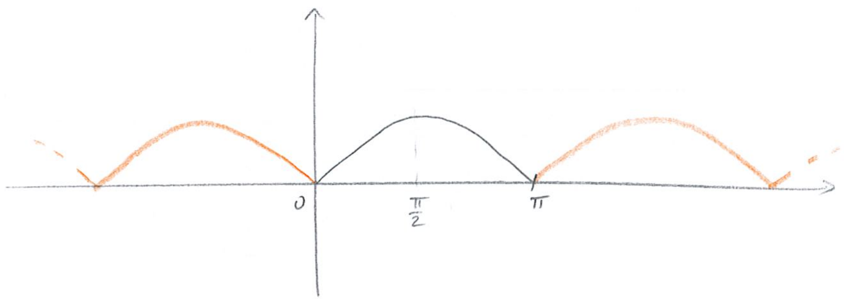
Enfin, comme précédemment, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k)^4} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^4}$

$$= \frac{1}{16} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^4} + \frac{\pi^4}{96}$$

et donc $\frac{15}{16} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{96}$, ce qui donne finalement :

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}}$$

Exercice 3 Dessinons l'allure du graphe de f :



- Sin est impaire donc |sin| est paire.
- f est continue par composition, et C^1 sur $[0,\pi]$, donc C^1_{pm} sur $\mathbb{R}$ par π-périodicité
- f est bien 2π périodique (comme valeur absolue d'une telle fonction)
  (et en fait π-périodique : $|\sin(x+\pi)| = |-\sin(x)| = |\sin x|$)

On peut donc calculer ses coeff de Fourier et lui appliquer tous les thm de convergence du cours.

Par parité, $\forall n \in \mathbb{N}$, $b_n(f) = 0$ et $a_n(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\cos(nt)\,dt$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin(t)\cos(nt)\,dt$$

(sin est $\geqslant 0$ sur $[0,\pi]$)

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{1}{2}\Big(\sin(t+nt) + \sin(t-nt)\Big)\,dt$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \Big(\sin((n+1)t) - \sin((n-1)t)\Big)\,dt \quad (*)$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[-\frac{\cos((n+1)t)}{n+1} + \frac{\cos((n-1)t)}{n-1}\right]_0^{\pi}$$

Si $n \neq 1$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\underbrace{\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n-1}}_{\frac{-2}{n^2-1}} - \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} + \frac{\overset{"\,(-1)^{n+1}}{\overline{(-1)^{n-1}}}}{n-1}\right)$$

$$= \frac{2}{\pi(n^2-1)}\left(-1 + (-1)^{n+1}\right) = \begin{cases} \dfrac{-4}{\pi(n^2-1)} & \text{si } n \text{ pair} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

En outre, $a_1(f) \underset{(*)}{=} \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin(2t)\,dt = \frac{1}{\pi}\left[-\frac{\cos(2t)}{2}\right]_0^{\pi} = 0$

Remarque f étant en fait π-périodique, l'exercice 7 nous aurait dit directement que les $a_{2k+1}(f)$ étaient nuls, $\forall k \in \mathbb{N}$.

Ainsi la série de Fourier de f est $\left(\frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k\in\mathbb{N}^*} a_{2k}(f)\cos_{2k}\right) = \left(\frac{2}{\pi} + \sum_{k\in\mathbb{N}^*} \frac{-4}{\pi(4k^2-1)}\cos_{2k}\right)$

Le thm de CVN ou le thm de Dirichlet donnent la CVS de Sf vers f sur $\mathbb{R}$.

En particulier, en 0, on obtient :

$$0 = f(0) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{4k^2-1}, \text{ ce qui entraîne } \boxed{\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{4k^2-1}} = \frac{\pi}{4}\times\frac{2}{\pi} = \boxed{\frac{1}{2}},$$

ce qu'on aurait pu trouver beaucoup plus simplement en fait car

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(4k^2-1)} = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1}\right) \underset{\text{somme télescopique}}{=} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2\cdot1-1} - \lim_{k\to+\infty}\frac{1}{2k+1}\right) = \frac{1}{2}$$

Pour la deuxième somme demandée, on applique le thm de Parseval :

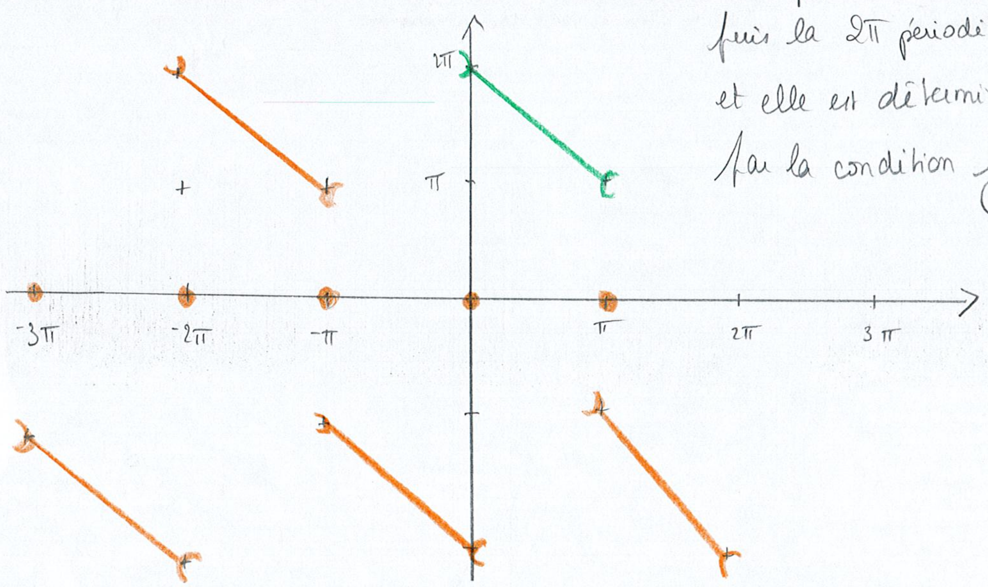
$$\underbrace{\frac{a_0(f)^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} a_n(f)^2 \; (+b_n(f))^2}_{A} = \underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(f(t))^2\,dt}_{B}$$

Or $A = \dfrac{4}{\pi^2} + \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\dfrac{-4}{\pi(4k^2-1)}\right)^2 = \dfrac{4}{\pi^2} + \dfrac{8}{\pi^2}\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\dfrac{1}{(4k^2-1)^2}$

et $B = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}(\sin(t))^2\,dt \underset{\text{parité}}{=} \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi}\left(\dfrac{1-\cos(2t)}{2}\right)dt = \dfrac{1}{2\pi}\left[t - \dfrac{\sin(2t)}{2}\right]_0^{\pi} = \dfrac{1}{2}$

Ainsi, $\boxed{\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\dfrac{1}{(4k^2-1)^2}} = \dfrac{\pi^2}{8}\left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{4}{\pi^2}\right)\boxed{= \dfrac{\pi^2}{16} - \dfrac{1}{2}}$

Exercice 4 Il faut commencer par fabriquer une fonction 2π périodique à laquelle on pourra appliquer les thm de convergence. Vu le développement recherché, c'est une fonction en outre impaire que nous allons fabriquer. Considérons donc l'unique fonction f impaire appartenant à $\mathcal{D}$ (cf cours) telle que, $\forall t \in \,]0,\pi[$, $f(t) = -t + 2\pi$. Voici son graphe sur $]0,\pi[$ puis ailleurs (l'imparité la détermine sur $]-\pi,0]$, puis la 2π périodicité sur $\mathbb{R}\setminus \pi + 2\pi\mathbb{Z}$, et elle est déterminée en $\pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, par la condition $f(x) = \dfrac{f(x^+) + f(x^-)}{2}$



Cette fonction est affine par morceaux donc C^1 par morceaux sur $[-\pi,\pi]$, donc sur $\mathbb{R}$ par 2π périodicité. Comme elle appartient à $\mathcal{D}$, le thm de Dirichlet affirme que $\forall t \in \mathbb{R}$, $f(t) = \dfrac{a_0(f)}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n(f)\cos(nt) + b_n(f)\sin(nt)$.

Il ne reste donc plus qu'à calculer les coefficients de Fourier et à appliquer cette égalité à $t \in \,]0,\pi[$.

• f est impaire donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n(f) = 0$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \; b_n(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\sin(nt)\,dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(-t+2\pi)\sin(nt)\,dt$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\left[(-t+2\pi)\left(-\frac{\cos(nt)}{n}\right)\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} -\left(-\frac{\cos(nt)}{n}\right)dt\right)$$

IPP,

$\left.\begin{array}{l} u : t \mapsto -t+2\pi \\ v : t \mapsto -\dfrac{\cos(nt)}{n}\end{array}\right\} C^1$

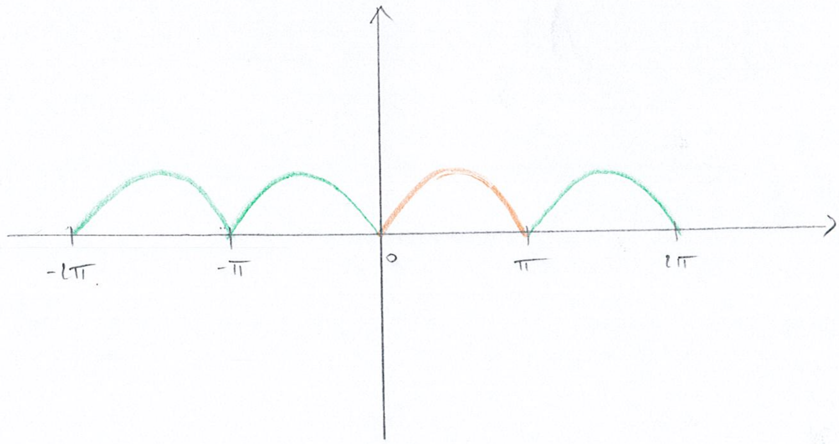
$$= \frac{2}{\cancel{\pi}}\left(-\cancel{\pi}\frac{\cos(n\pi)}{n} + 2\cancel{\pi}\frac{1}{n} - \underbrace{\left[\frac{\sin(nt)}{n^2}\right]_0^{\pi}}_{0}\right)$$

$$= \frac{2}{n}\Big(2 - \underbrace{\cos(n\pi)}_{(-1)^n}\Big) = \frac{2(2+(-1)^{n+1})}{n}$$

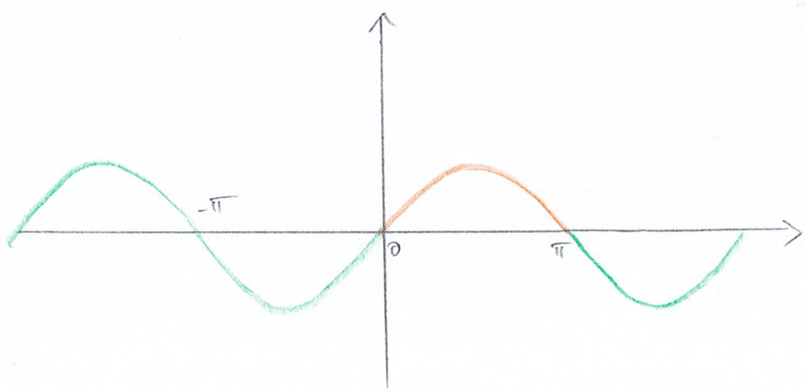
On obtient donc bien, $\forall t \in]0,\pi[$, $f(t) = \boxed{-t+2\pi = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2(2+(-1)^{n+1})}{n}\sin(nt)}$

<u>Exercice 5</u> On recherche 2 développements de $f : x \mapsto x(\pi - x)$ sur $[0,\pi]$, l'un "en cos", l'autre "en sin". L'idée est donc de prolonger cette fonction en fct° 2π pér. sur $\mathbb{R}$ de deux façons : en une fonction paire f_1 d'une part, et impaire f_2 d'autre part, dont nous allons esquisser les graphes, en commençant par esquisser celui de $f : x \mapsto x(\pi - x)$ sur $[0,\pi]$ (trinôme s'annulant en 0 et π, de coeff dominant -1, donc admettant un max en $\frac{\pi}{2}$).

↳ <u>graphe de f_1</u>



↳ <u>graphe de f_2 :</u>



Remarque Étant donnée une fonction g sur $[0,\pi]$, il existe toujours une unique fonction paire $\tilde{g}$ 2π périodique coïncidant avec g sur $[0,\pi]$, alors que pour qu'il existe une fonction impaire $\tilde{g}$ 2π pér. coïncidant avec g sur $[0,\pi]$, il faut en outre que $g(0)=0$ et que $g(\pi)=0$ (puisqu'on veut $-g(\pi) = g(\pi)$

$\underset{\text{par imparité}}{\tilde{g}(-\pi)} = \underset{\text{pour la } 2\pi \text{ périodicité}}{\tilde{g}(\pi)}$)

Si ces conditions sont satisfaites (et sans condition pour le prolongement en fonction paire) et si g est C^0 sur $[0,\pi]$, le prolongement est automatiquement continu (il l'est sur $\mathbb{R}\setminus\pi\mathbb{Z}$ et on le vérifie facilement aux points de $\pi\mathbb{Z}$)

Si g est C^1, le prolongement est automatiquement C^1 par morceaux (C^1 en restriction à chaque segment $[k\pi,(k+1)\pi]$, $k\in\mathbb{Z}$)

Les fonctions f_1 et f_2 précédentes sont donc C^1p.m et C^0 (et 2π périodiq) Elles satisfont donc les hyp du thm de convergence normale. En particulier, leurs séries de Fourier CVS sur $\mathbb{R}$ (vers f_1 et f_2 respectivement, donc vers g sur $[0,\pi]$) (*)

Calculons donc ces séries, ie les coeff de Fourier trigo.

- f_1 est paire donc $\forall n\in\mathbb{N}$, $b_n(f_1)=0$ et

$$a_n(f_1)= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f_1(t)\cos(nt)\,dt = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi t(\pi-t)\cos(nt)\,dt$$

$$\overset{\text{IPP}}{\underset{n\neq 0}{=}} \frac{2}{\pi}\left(\underbrace{\left[t(\pi-t)\frac{\sin(nt)}{n}\right]_0^\pi}_{0} - \int_0^\pi(\pi-2t)\frac{\sin(nt)}{n}\,dt\right)$$

$$= -\frac{2}{\pi}\left(\left[(\pi-2t)\frac{(-\cos(nt))}{n^2}\right]_0^\pi + \underbrace{\int_0^\pi -2\,\frac{\cos(nt)}{n^2}\,dt}_{-\frac{2}{n^2}\left[\frac{\sin(nt)}{n}\right]_0^\pi = 0}\right)$$

$$= -\frac{2}{\cancel{\pi}}\left((-\cancel{\pi})\frac{(-\cos n\pi)}{n^2} + \frac{\cancel{\pi}}{n^2}\right)$$

$$= -\frac{2}{n^2}\left(1+(-1)^n\right) = \begin{cases} -\dfrac{4}{(2k)^2} = -\dfrac{1}{k^2} & \text{si } n=2k, \\ 0 \text{ si } n=2k+1, & k\in\mathbb{N}\end{cases}$$

Manque $\boxed{a_0(f_1)} = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi t(\pi-t)\,dt = \frac{2}{\pi}\left[\frac{\pi t^2}{2}-\frac{t^3}{3}\right]_0^\pi = \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi^3}{2}-\frac{\pi^3}{3}\right) = \boxed{\frac{\pi^2}{3}}$

(*) affirme donc que

$$\forall x\in[0,\pi],\quad x(\pi-x)=\frac{a_0(f_1)}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}a_n(f_1)\cos(nx)+b_n(f_1)\sin(nx)$$

$$=\frac{\pi^2}{6}+\sum_{k=1}^{+\infty}a_{2k}(f_1)\cos(2kx)$$ (tous les autres coeff. sont nuls)

$$\boxed{x(\pi-x)=\frac{\pi^2}{6}-\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\cos(2kx)}{k^2}}$$, ce qui est la 1ère formule demandée.

• f_2 est impaire donc $\forall n\in\mathbb{N}$, $a_n(f_2)=0$ et

$$\forall n\in\mathbb{N}^*\quad b_n(f_2)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}t(\pi-t)\sin(nt)\,dt$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(\underbrace{\left[t(\pi-t)\frac{-\cos(nt)}{n}\right]_0^{\pi}}_{0}-\int_0^{\pi}(\pi-2t)\left(\frac{-\cos nt}{n}\right)dt\right)$$

$$=+\frac{2}{\pi}\left(\underbrace{\left[(\pi-2t)\frac{\sin(nt)}{n^2}\right]_0^{\pi}}_{0}-\int_0^{\pi}-2\frac{\sin nt}{n^2}dt\right)$$

$$=\frac{4}{\pi n^2}\left[-\frac{\cos(nt)}{n}\right]_0^{\pi}=\frac{4}{\pi n^3}\left((-1)^{n+1}+1\right)=\begin{cases}\frac{8}{\pi n^3} & \text{si } n \text{ est impaire}\\ 0 & \text{si } n \text{ est pair}\end{cases}$$

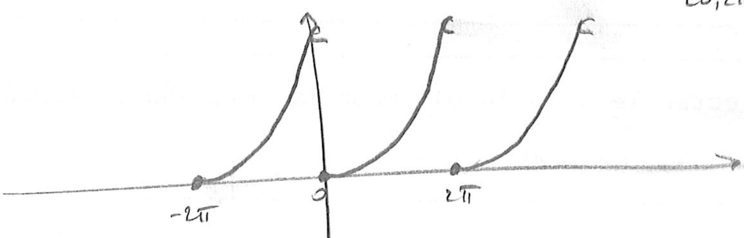
(*) affirme donc que

$$\forall x\in[0,\pi]\quad x(\pi-x)=\sum_{n=1}^{+\infty}b_n(f)\sin(nx)$$

$$=\sum_{k=0}^{+\infty}b_{2k+1}(f)\sin((2k+1)x)$$ (les autres coeff sont nuls)

$$\boxed{x(\pi-x)=\frac{8}{\pi}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\sin((2k+1)x)}{(2k+1)^3}}$$, ce qui est la 2e formule demandée.

Exercice 6 Commençons par nous ramener à une fonction 2π périodique en posant $x=\pi t$ de sorte que $t^2=\frac{x^2}{\pi^2}$. On étend la fct° $\underset{[0,2\pi[}{x}\mapsto\frac{x^2}{\pi^2}$ en fonction 2π périodique



On obtient une fonction f C^1 par morceaux, à laquelle on peut appliquer le thm de Dirichlet :

$\forall x \in \mathbb{R} \quad \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f) e^{inx} = \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}$

En particulier, pour $x \in]0, 2\pi[$ où f est continue,

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f) e^{inx} = f(x) = \frac{x^2}{\pi^2}, \text{ ie } \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f) e^{in\pi t} = t^2$$

Calculons donc $c_n(f)$ $\forall n \in \mathbb{Z}$:

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(u) e^{-inu} du = \frac{1}{2\pi^3} \int_0^{2\pi} u^2 e^{-inu} du$$

si $n \neq 0$

$$= \frac{1}{2\pi^3} \left(\left[u^2 \frac{e^{-inu}}{-in} \right]_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} 2u \frac{e^{-inu}}{in} du \right)$$

$$= \frac{1}{2\pi^3} \left(\frac{-4\pi^2}{in} + \left[-2u \frac{e^{-inu}}{(in)^2} \right]_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} 2 \frac{e^{-inu}}{(in)^2} du \right)$$

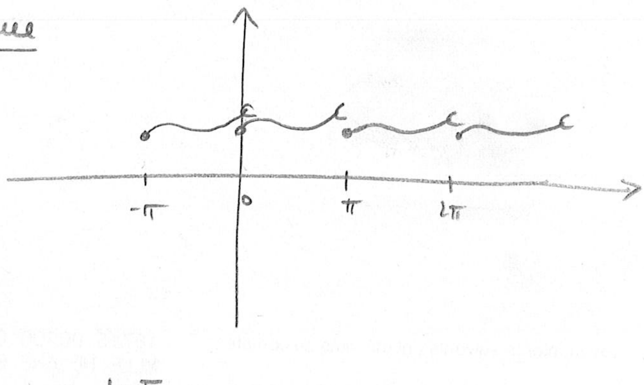
$$= \frac{1}{\cancel{2}\pi^{\cancel{3}}} \left(-\frac{\cancel{4}^{2}\pi^{\cancel{2}}}{in} - \frac{\cancel{4\pi}^{2}}{(in)^2} + \underbrace{2 \left[\frac{-e^{-inu}}{(in)^3} \right]_0^{2\pi}}_{0} \right)$$

$$= \frac{2 + 2i\pi n}{\pi^2 n^2} \qquad \left(-\frac{1}{i} = i, \quad i^2 = -1 \right)$$

Et pour $n = 0$: $\quad c_0(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{u^2}{\pi^2} du = \frac{1}{2\pi^3} \left[\frac{u^3}{3} \right]_0^{2\pi} = \frac{8\pi^3}{6\pi} = \frac{4}{3}$

On trouve donc bien $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f) e^{in\pi t} = \boxed{\frac{4}{3} + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{+\infty} \frac{2 + 2i\pi}{\pi^2 n^2} e^{in\pi t} = t^2}$

<u>Exercice 7</u> a) signifie que f est <u>π-périodique</u>



On a alors, $\forall n \in \mathbb{Z}$

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} dt$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left(\int_0^{\pi} f(t) e^{-int} dt + \int_{\pi}^{2\pi} f(t) e^{-int} dt \right)$$

chgt de var $u = t + \pi$

$$\int_0^{\pi} \underbrace{f(u-\pi)}_{= f(u)} e^{-in(u-\pi)} du = \underbrace{e^{in\pi}}_{(-1)^n} \int_0^{\pi} f(u) e^{-inu} du$$

donc $c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \underbrace{\left(1+(-1)^n\right)}_{\begin{cases} 2 \text{ si } n \text{ pair} \\ 0 \text{ si } n \text{ impair} \end{cases}} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int}\, dt$

↳ les $c_n(f)$ sont nuls pour n impair. (et donc les $a_n(f)$ et $b_n(f)$ aussi vues les relations entre les coeff)

On aurait pu le "prévoir" en regardant $S_f(x)$ et $S_f(x+\pi)$

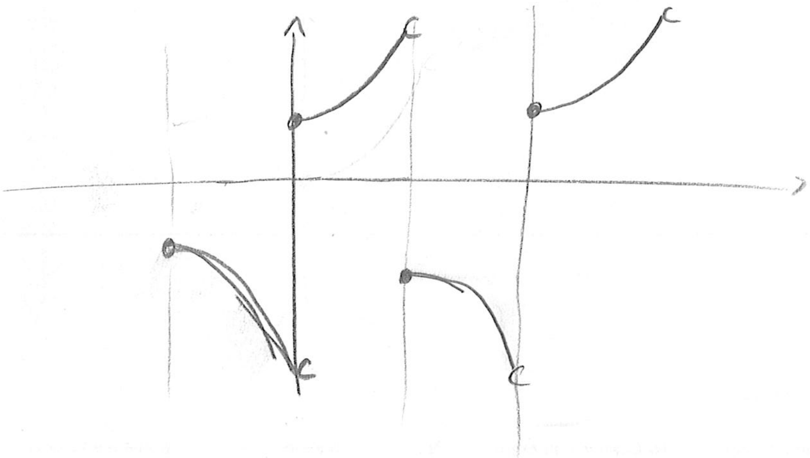
$$\underset{\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f) e^{inx}\right)}{\parallel} \qquad \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f) e^{in(x+\pi)}\right) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} (-1)^n c_n(f) e^{inx}$$

Mais sans plus d'hypothèse sur f, on ne sait pas que ces séries convergent vers une même fonction, et on ne sait pas qu'une fonction admet un unique développement en série trigo, donc on ne peut pas procéder "par identification".

Par contre, on peut montrer, en général, que si $g(x+\pi) = f(x)$, les coeff de g et ceux de f sont reliés par : $\forall n \in \mathbb{Z}$ $c_n(g) = (-1)^n c_n(f)$. Dans le cas a), on obtient alors $c_n(f) = (-1)^n c_n(f)$, ce qui redonne le résultat obtenu précédemment.

b) par la remarque précédente, si g est la fct $x \mapsto -f(x+\pi)$ (2π pér, C^0 pm),
$\forall n \in \mathbb{Z}$, $c_n(g) = (-1)^{n+1} c_n(f)$

Donc ici, $c_n(f) = (-1)^{n+1} c_n(f)$, ce qui donne cette fois que les coeff exponentiels de f d'ordre pair sont nuls. Voici le graphe d'une telle fonction :



c) Posons $g : x \longmapsto f(\pi - x)$

$$\forall n \in \mathbb{Z},\quad c_n(g) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\pi - x)e^{-inx}\,dx$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\int_{\pi}^{-\pi} f(u)\, \underbrace{e^{-in(\pi-u)}}_{e^{-in\pi}\times e^{inu}}\,du$$

Chgt de var $u = \pi - x$

$$= \frac{(-1)^n}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)e^{inu}\,du$$

$$= (-1)^n c_{-n}(f)$$

Ainsi, dans le cas c), $\forall n \in \mathbb{Z}$ $\quad c_n(f) = (-1)^n c_{-n}(g)$

Sachant que, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_n(f) = c_n(f) + c_{-n}(f)$ et $b_n(f) = i(c_n(f) - c_{-n}(f))$

cela entraine que les <u>$a_n(f)$ sont nuls pour n impairs</u> et les <u>$b_n(f)$ sont nuls pour n pair.</u>

d) Même chose en intervertissant a_n et b_n.

<u>Exercice 8</u> Soit $\alpha \in [0,1[$ et $x \in \mathbb{R}$. $\quad \forall n \in \mathbb{N},\quad \alpha^n \cos(nx) = \alpha^n \operatorname{Re}(e^{inx})$

$$= \operatorname{Re}\left((\alpha e^{ix})^n\right)$$

or $|\alpha e^{ix}| = \alpha \in [0,1[$ donc $\sum_{n=0}^{+\infty} (\alpha e^{ix})^n$ est défini et vaut $\frac{1}{1-\alpha e^{ix}}$ (séries géom)

Ainsi, $\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha^n \cos(nx)$ existe et vaut $\operatorname{Re}\left(\frac{1}{1-\alpha e^{ix}}\right)$

or $$\frac{1}{1-\alpha e^{ix}} = \frac{1-\alpha e^{-ix}}{(1-\alpha e^{ix})(1-\alpha e^{-ix})} = \frac{1-\alpha\cos x + i\alpha \sin x}{1+\alpha^2 - 2\alpha\cos x}$$

et on obtient bien la formule voulue pour $\operatorname{Re}\left(\frac{1}{1-\alpha e^{ix}}\right)$.

La deuxième partie de la question consiste à justifier que

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad \frac{a_n(f)}{2} = \begin{cases} \alpha^n/2 & \text{si } n \neq 0 \\ 1 & \text{si } n = 0 \end{cases}$$, où f est la fct° 2π p.

$x \longmapsto \operatorname{Re}\left(\frac{1}{1-\alpha e^{ix}}\right)$. Or on a une décomposition de f en somme de série trigo : $\forall x\in\mathbb{R},\ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha^n \cos(nx)$. Mais il faudrait a priori justifier que c'est bien sa série de Fourier. C'est le cas car cette série converge <u>normalement</u> sur $\mathbb{R}$: $\forall n\in\mathbb{N},\ \forall x\in\mathbb{R},\ |\alpha^n\cos(nx)| \leq \alpha^n$ TG d'une série CV.

Donc

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(nx)\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\left(\sum_{k=0}^{+\infty}\alpha^k\cos(kx)\right)\cos(nx)\right)dx = \sum_{k=0}^{+\infty}\alpha^k\underbrace{\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos(kx)\cos(nx)\,dx\right)}_{=\begin{cases}0 \text{ si } k\neq n\\ \frac{1}{2} \text{ si } k=n\neq 0\\ 1 \text{ si } k=n=0\end{cases}}$$

$\sum_{k\in\mathbb{N}} x\mapsto \alpha^k\cos(kx)\cos(nx)$ CVN également sur $[0,2\pi]$

↳ interversion $\sum/\int$

$$= \begin{cases}\frac{\alpha^n}{2} \text{ si } n\neq 0\\ 1 \text{ si } n=0\end{cases}$$

<u>Exercice 9</u> On a vu en cours que $c_n(f) = \frac{1}{in}c_n(f')$

Par une récurrence immédiate, $c_n(f) = \frac{c_n(f^{(p)})}{(in)^p}$

donc $|c_n(f)| = \frac{|c_n(f^{(p)})|}{n^p}$, or on sait que $c_n(f^{(p)}) \xrightarrow[|n|\to+\infty]{} 0$,

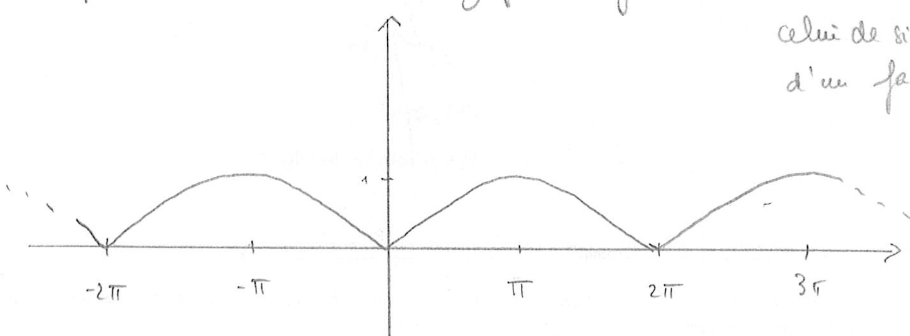
(vrai pour les coeff de Fourier de n'importe quelle fct° C^0pm 2π pér.)

Ce qui donne mieux que le résultat voulu.

<u>Exercice 10</u> 1) $\frac{1}{(2n-1)(2n+1)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{4n^2}$ TG d'une série cv (par Riemann)

donc par comparaison de séries à TG ≥ 0 la série de l'énoncé cv.

2) Commençons par donner l'allure du graphe de f sur $\mathbb{R}$: (sur $[0,2\pi[$, le graphe de f est celui de sin sur $[0,\pi[$ "étiré" d'un facteur 2)



"Graphiquement", il semble que f soit continue sur $\mathbb{R}$, C^1 par morceaux et dérivable sur $\mathbb{R}\setminus 2\pi\mathbb{Z}$ (et non dérivable aux points de $2\pi\mathbb{Z}$)

Justifions-le :

- Remarquons que $f(x)$ est en fait égal à $\sin\left(\frac{x}{2}\right)$ pour tout $x \in [0, 2\pi]$.

En effet, par définition, $f(2\pi) = f(0) = \sin\left(\frac{0}{2}\right) = 0 = \sin \pi = \sin\left(\frac{2\pi}{2}\right)$

f est donc continue sur $[0,2\pi]$ par composition, et une fonction 2π-périodique dont la restriction à $[\alpha, \alpha+2\pi]$ est continue pour un certain $\alpha \in \mathbb{R}$ est continue sur $\mathbb{R}$: f est donc continue sur $\mathbb{R}$.

(On peut sinon le justifier à la main : f est C^0 en tout point de $]0,2\pi[$ par composition, donc de $\mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$ par 2π périodicité.

En 0 : $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \sin\left(\frac{x}{2}\right) = \sin(0) = 0 = f(0)$

et $\lim_{x \to 0^-} f(x) \underset{\substack{\uparrow \\ 2\pi \text{ périodicité}}}{=} \lim_{x \to 2\pi^-} f(x) = \lim_{x \to 2\pi^-} \sin\left(\frac{x}{2}\right) = \sin(\pi) = 0 = f(0)$

Donc f est continue en 0, et en tout point de $2\pi\mathbb{Z}$ par 2π périodicité.
Finalement f est C^0 en tout point de $\mathbb{R}$, i.e C^0 sur $\mathbb{R}$)

- Le fait que $f = x \mapsto \sin\left(\frac{x}{2}\right)$ sur $[0,2\pi]$ montre également que la restriction de f à ce segment est C^1 (toujours par composition, $x \mapsto \frac{x}{2}$ et $y \mapsto \sin(y)$ étant C^∞ sur $\mathbb{R}$). Or une fonction 2π-périodique dont la restriction à $[0,2\pi]$ est C^1 est elle-même C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$

(⚠, c'est plus subtile qu'avec la continuité. La 2π périodicité montre que f est C^1 sur $\forall$ intervalle $[2\pi k, 2\pi(k+1)]$, mais elle peut ne pas l'être sur leur réunion (c'est le cas ici) si les dérivées à droite et à gauche de f en 0 diffèrent)

f est donc C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$

- f n'est pas dérivable en 0 : f restreinte à $[0,2\pi]$ est C^1 et $\forall x \in [0,2\pi]$,

$\left(f_{|[0,2\pi]}\right)'(x) = \frac{1}{2}\cos\left(\frac{x}{2}\right)$. En particulier, f admet $\frac{1}{2}$ comme dérivée à droite en 0 et $-\frac{1}{2}$ comme dérivée à gauche en 2π, et donc en 0 par 2π périodicité. Ceci montre que f n'est pas dérivable en 0.

3) On peut soit suivre les conseils de l'énoncé, soit (ce qui revient plus ou moins au même) commencer par calculer les coeff de Fourier "exponentiels" de f :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin\left(\frac{t}{2}\right) e^{-int}\,dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{i\frac{t}{2}} - e^{-i\frac{t}{2}}}{2i} e^{-int}\,dt$$

$$= \frac{1}{4\pi i}\int_0^{2\pi} \left(e^{it(\frac{1}{2}-n)} - e^{it(-\frac{1}{2}-n)}\right)dt$$

$$= \frac{-1}{4\pi \cancel{i}}\left[\frac{e^{it(\frac{1}{2}-n)}}{\cancel{i}(\frac{1}{2}-n)} + \frac{e^{it(-\frac{1}{2}-n)}}{(+\frac{1}{2}+n)\cancel{i}}\right]_0^{2\pi}$$

$$= \frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{\frac{1}{2}-n}\underbrace{\left(1-\underbrace{e^{i2\pi(\frac{1}{2}-n)}}_{=e^{i\pi}=-1}\right)}_{2} + \frac{1}{\frac{1}{2}+n}\underbrace{\left(1-\underbrace{e^{i2\pi(-\frac{1}{2}-n)}}_{=e^{-i\pi}=-1}\right)}_{2}\right)$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n-1}\right) = -\frac{2}{\pi(2n+1)(2n-1)}$$

f étant à valeurs réelles, $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n(f) = 2\,\mathrm{Re}(c_n(f))$ (car $\mathrm{Re}(e^{-int}) = \cos nt$)

et $b_n(f) = -2\,\mathrm{Im}(c_n(f))$ (car $\mathrm{Im}(e^{-int}) = -\sin(nt)$)

On obtient donc, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\boxed{a_n(f) = -\frac{4}{\pi(2n+1)(2n-1)} \quad \text{et} \quad b_n(f) = 0}$

La série de Fourier de f est : $\left(\frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n\geq 1} a_n(f)\cos_n + b_n(f)\sin_n\right)$, ce qui donne bien la formule de l'énoncé $\left(\frac{a_0(f)}{2} = -\frac{2}{\pi(2\times 0+1)(2\times 0-1)} = \frac{2}{\pi}\right)$.

---

4) a) b) c) f satisfait les hypothèses du thm de convergence normale, donc sa série de Fourier converge normalement (et a fortiori simplement) sur $\mathbb{R}$ tout entier, et sa somme est f.

5) On n'a pas besoin d'utiliser le thm de Dirichlet puisqu'on a déjà dit que f était égale à la somme de sa série de Fourier sur $\mathbb{R}$.

En particulier, $0 = f(0) = \frac{2}{\pi} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{\pi(2n-1)(2n+1)} \underbrace{\cos(0)}_{1}$

Ce qui donne $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{\pi}{4} \times \frac{2}{\pi} = \underline{\frac{1}{2}}$.

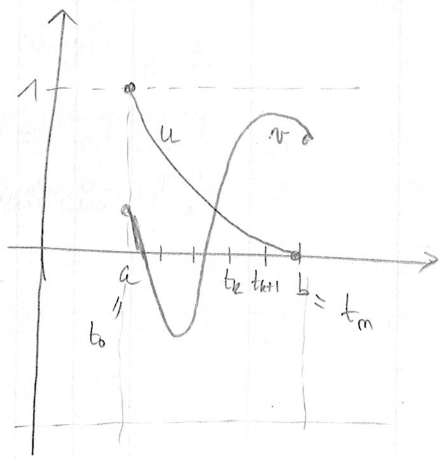
On a vu au cours du calcul des coeff de Fourier que $\frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right)$

Donc $\underline{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right) = \frac{1}{2}\left(\overbrace{\frac{1}{2\times 1-1}}^{1} - \overbrace{\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2n+1}}^{0}\right)$ (somme télescopique)

$= \underline{\frac{1}{2}}$.

On retrouve bien le même résultat.

Exercice 11



1) $\left| I_n - \int_a^b u(t)\,v(t)\,dt \right|$ Charles

$= \left| \sum_{k=0}^{n-1} u(t_{k+1}) \int_{t_k}^{t_{k+1}} v(t)\,dt - \sum_{k=0}^{n-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} u(t)\,v(t)\,dt \right|$

linéarité de $\int$

$= \left| \sum_{k=0}^{n-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \left(u(t_{k+1}) - u(t)\right) v(t)\,dt \right|$

inégalité Δ

$\leq \sum_{k=0}^{n-1} \left| \int_{t_k}^{t_{k+1}} \left(u(t_{k+1}) - u(t)\right) v(t)\,dt \right|$

$\leq \sum_{k=0}^{n-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \underbrace{\left|u(t_{k+1}) - u(t)\right|}_{\substack{= u(t) - u(t_{k+1}) \\ \leq u(t_k) - u(t_{k+1}) \\ \text{car } u \searrow}} . \underbrace{|v(t)|}_{\leq 1}\,dt$

$\left(\text{si } \alpha \leq \beta, \left|\int_\alpha^\beta f\right| \leq \int_\alpha^\beta |f| \text{ quelle que soit } f\ C^0_{p.m.}\right)$

$\left(f \leq g \Rightarrow \int_\alpha^\beta f \leq \int_\alpha^\beta g\right)$

$\leq \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} \underbrace{\int_{t_k}^{t_{k+1}} \underbrace{\left(u(t_k) - u(t_{k+1})\right)}_{\text{cste}} dt}_{= \underbrace{(t_{k+1} - t_k)}_{\frac{1}{n}} \left(u(t_k) - u(t_{k+1})\right)}}_{(*)}$

$(*) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(u(t_k) - u(t_{k+1})\right)$

télésc. $= \frac{1}{n}\left(u(a) - u(b)\right) = \frac{1}{n}$. $\blacksquare$

2) Il s'agit d'une transformation d'Abel, combinée à la relation de Charles.
(l'indication n'est pas au bon endroit dans l'énoncé)

Posons $u_k = u(t_k)$, $v_k = \displaystyle\int_{t_k}^{t_{k+1}} v(t)\,dt$ et $V_k = \displaystyle\sum_{j=0}^{k-1} v_j \underset{\text{Charles}}{=} \int_a^{t_k} v(t)\,dt$

Alors $I_m = \displaystyle\sum_{k=0}^{m-1} u_{k+1} v_k$

$$= \sum_{k=0}^{m-1} u_{k+1}\left(V_{k+1} - V_k\right) = \underbrace{\sum_{k=0}^{m-1} u_{k+1} V_{k+1}}_{=\sum_{j=1}^{m} u_j V_j} - \sum_{k=0}^{m-1} u_{k+1} V_k$$

$$= u_m V_m + \sum_{k=1}^{m-1} (u_k - u_{k+1}) V_k - u_1 V_0$$

Or $u_m = u(t_m) = u(b) = 0$ et $V_0 = \displaystyle\int_a^{b} v(t)\,dt = \int_a^{a} v(t)\,dt = 0$.

On trouve donc bien l'égalité demandée.

---

3) Notons $M = \displaystyle\max_{x\in[a,b]} \left|\int_a^x v(t)\,dt\right|$ (bien défini car $x \longmapsto \displaystyle\int_a^x v(t)\,dt$ est C^1 et en particulier continue sur le segment $[a,b]$ donc elle admet un min et un max)

Alors $\forall m \in \mathbb{N}^*$

$$|I_m| \overset{2)}{=} \left|\sum_{k=0}^{m-1} \left(u(t_k) - u(t_{k+1})\right) \int_a^{t_k} v(t)\,dt\right|$$

$$\leq \sum_{k=0}^{m-1} \underbrace{|u(t_k) - u(t_{k+1})|}_{\geq 0}\, \underbrace{\left|\int_a^{t_k} v(t)\,dt\right|}_{\leq M}$$

$$\leq M \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} \left(u(t_k) - u(t_{k+1})\right)}_{=1,\ \text{déjà vu}}$$

Or $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\left|\int_a^b u(t)v(t)\,dt\right| = \left|\int_a^b u(t)v(t)\,dt - I_m + I_m\right| \leq \underbrace{\left|I_m - \int_a^b u(t)v(t)\,dt\right|}_{\underset{(1)}{\leq} \frac{1}{m}} + \underbrace{|I_m|}_{\leq M}$

En passant à la limite qd $m \to +\infty$, on obtient la majoration voulue.

---

4) Soit f 2π périodique et monotone par morceaux (et C^0 par morceaux, sous entendu).

il existe $a_0 = 0 < a_1 < \dots < a_{p-1} < a_p = 2\pi$ tels que f soit monotone sur $[a_j, a_{j+1}]$ $\forall j$.

Alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos nt\,dt$

$$= \frac{1}{\pi}\sum_{j=0}^{p-1} \underbrace{\int_{a_j}^{a_{j+1}} f(t)\cos(nt)\,dt}$$

il suffit donc de vérifier que chacun de ces termes (et son analogue en sin) est un $O\left(\frac{1}{n}\right)$ (p étant fixé une fois pour toutes)

On fixe donc $j \in [\![0, p-1]\!]$ et on note $a = a_j$ et $b = a_{j+1}$.

Si f n'est pas constante sur $[a,b]$, posons $u(t) = \dfrac{f(t)-f(b)}{f(a)-f(b)}$ (qui décroît de 1 à 0 sur $[a,b]$)

de sorte que $f(t) = \big(f(a)-f(b)\big)u(t) + f(b)$ et donc

$$\int_a^b f(t)\cos(nt)\,dt = \big(f(a)-f(b)\big)\int_a^b u(t)\cos(nt)\,dt + f(b)\underbrace{\int_a^b \cos(nt)\,dt}_{\left[\frac{\sin(nt)}{n}\right]_a^b = O\left(\frac{1}{n}\right)} \quad (*)$$

D'après ce qui précède, $\left|\int_a^b u(t)\underbrace{\cos(nt)}_{v(t)}\,dt\right| \leq \max_{x\in[a,b]} \left|\int_a^x \cos(nt)\,dt\right| \leq \frac{2}{n}$
(u étant satisfaisant les bonnes hyp.)

$$\left|\int_a^x \cos(nt)\,dt\right| = \left|\frac{\sin nx}{n} - \frac{\sin na}{n}\right| \leq \frac{2}{n}$$

Et on obtient bien par inégalité triangulaire $\int_a^b f(t)\cos(nt)\,dt = O\left(\frac{1}{n}\right)$

Si f est constante sur $[a,b]$, on a simplement $\int_a^b f(t)\cos(nt)\,dt = f(b)\int_a^b \cos(nt)\,dt$
et ce terme a déjà été étudié

Ainsi $a_n(f) = O\left(\frac{1}{n}\right)$, et on procède de même pour $b_n(f)$.

---

5) On considère cette fois une subdivision $a_0 = 0 < a_1 < \dots < a_{p-1} < a_p = 2\pi$ tq $f_{|]a_j,a_{j+1}[}$ se prolonge en une fonction C^1, notée g, sur $[a_j, a_{j+1}]$. En commençant comme précédemment, on voit qu'il suffit cette fois de montrer que $\int_{a_j}^{a_{j+1}} g(t)\cos(nt)\,dt = O\left(\frac{1}{n}\right)$.

Fixons donc j et posons $a=a_j$, $b=b_j$ et $g=g_j$

Alors $\displaystyle\int_a^b g(t)\cos(nt)\,dt \underset{\substack{\uparrow\\ \text{IPP, licite}\\ \text{car } g \text{ est } C^1 \text{ sur } [a,b]}}{=} \left[g(t)\frac{\sin(nt)}{n}\right]_a^b - \int_a^b g'(t)\frac{\sin(nt)}{n}\,dt$

$$= g(b)\frac{\sin nb}{n} - g(a)\frac{\sin(na)}{n} - \frac{1}{n}\int_a^b g'(t)\sin nt\,dt$$

Donc $\displaystyle\left|\int_a^b g(t)\cos(nt)\,dt\right| \underset{\substack{\uparrow\\ \text{inégalité } \Delta \text{ pour } \Sigma \text{ et } \int}}{\leq} |g(b)|\underbrace{\left|\frac{\sin nb}{n}\right|}_{\leq \frac{1}{n}} + |g(a)|\underbrace{\left|\frac{\sin(na)}{n}\right|}_{\leq\frac{1}{n}} + \frac{1}{n}\int_a^b |g'(t)|\times\underbrace{|\sin(nt)|}_{\leq 1}\,dt$

$$\leq \frac{2M}{n} + \frac{M'}{n}(b-a) \quad \text{où} \quad M = \max_{[a,b]}|g| \text{ et } M' = \max_{[a,b]}|g'|$$

$$= O\left(\frac{1}{n}\right) \quad \boxtimes$$

Exercice 12 1) Soit $k\in\mathbb{N}^*$. $\forall t\in\mathbb{R}$, $\displaystyle |u_k(t)| \leq \overbrace{\frac{|\sin(4^{k^2}t)|}{k^2}}^{\leq 1} \times \underbrace{\left|\sum_{\ell=1}^{2^{k^2}} \frac{\sin(\ell t)}{\ell}\right|}_{\leq C}$

$\leq \dfrac{C}{k^2}$, TG d'une série convergente (Riemann) donc

$\left(\sum_{k\in\mathbb{N}^*} u_k\right)$ CVN sur $\mathbb{R}$. Chaque u_k étant continue sur $\mathbb{R}$ et la CVN entraînant la CVU, par thm de continuité, sa somme, $f=\sum_{k=1}^{+\infty} u_k$, est continue sur $\mathbb{R}$.

Chaque u_k étant en outre 2π périodique (comme produit de telles fonctions)

$\forall t\in\mathbb{R}$, $\displaystyle f(t+2\pi) = \sum_{k=1}^{+\infty} \underbrace{u_k(t+2\pi)}_{=u_k(t)} = f(t)$, ie f est elle aussi 2π pér.

2) Soit $k\in\mathbb{N}^*$ On peut remarquer que u_k est en fait un polynôme trigo. En effet,

comme $\sin(a)\sin(b) = \dfrac{\cos(a-b)-\cos(a+b)}{2}$, $\forall t\in\mathbb{R}$,

$$u_k(t) = \sum_{\ell=1}^{2^{k^2}} \frac{1}{k^2\ell}\sin(4^{k^2}t)\sin(\ell t) = \sum_{\ell=1}^{2^{k^2}} \frac{1}{2k^2\ell}\left(\cos((4^{k^2}-\ell)t) - \cos((4^{k^2}+\ell)t)\right),$$

qui est bien une combinaison linéaire des fonctions $t\mapsto\cos(mt)$, $m\in\mathbb{N}^*$.

$(4^{k^2}-2^{k^2}>0$ car $k\neq 0)$

que l'on peut réécrire $\displaystyle\sum_{\substack{l=-2^{k^2}\\ l\neq 0}}^{2^{k^2}} \frac{\pm 1}{2k^2 l} \cos\left(\left(4^{k^2}-l\right)t\right)$, ou encore $\displaystyle\sum_{\substack{j=4^{k^2}-2^{k^2}\\ j\neq 4^{k^2}}}^{4^{k^2}+2^{k^2}} \frac{\pm 1}{2k^2\left(4^{k^2}-j\right)} \cos(jt)$

de la forme $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cos(nt)$, avec $a_n = \begin{cases} \dfrac{\pm 1}{2k^2\left(4^{k^2}-j\right)} & \text{si } 4^{k^2}-2^{k^2} \leq j \leq 4^{k^2}+2^{k^2},\ j \neq 4^{k^2} \\ 0 \text{ sinon (en particulier } a_0=0) \end{cases}$

Les coefficients de Fourier $\left(a_n(u_k)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ de u_k sont donc précisément ces a_n, et $b_n(u_k)=0\ \forall n\in\mathbb{N}$ (cours, coeff de Fourier d'un polynôme trigo)

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left(\sum_{k=1}^{+\infty} u_k(t)\right)\cos(nt)\,dt$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\sum_{k=1}^{+\infty}\left(u_k(t)\cos(nt)\right)dt$$

Or $\|u_k \cos_m\|_{\infty,[0,2\pi]} \leq \|u_k\|_\infty$, donc $\left(\sum_{k\geq 1} u_k \cos_m\right)$ CVN sur $[0,2\pi]$, et comme sa limite simple est $\cos_m f$, elle CVU vers cette fonction, donc on peut appliquer le thm d'interversion $\sum/\int$ et on obtient :

$$a_n(f) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} u_k(t)\cos(nt)\,dt = \sum_{k=1}^{+\infty} a_n(u_k),$$ et de même pour $b_n(f)$ (ce qui donne 0)

3) $$S_N(f)(0) = \underbrace{\frac{a_0(f)}{2}}_{0} + \sum_{n=1}^{N} a_n(f)$$

$$= \sum_{n=1}^{N}\sum_{k=1}^{+\infty} a_n(u_k)$$

En particulier, $\forall K\in\mathbb{N}^*$, $\overbrace{S_{4^{K^2}-1} - S_{4^{K^2}-2^{K^2}-1}}^{(*)} = \displaystyle\sum_{n=4^{K^2}-2^{K^2}}^{4^{K^2}-1}\sum_{k=1}^{+\infty} a_n(u_k)$

or seul u_K a des coeff a_m non nuls pour $m\in[\![4^{K^2}-2^{K^2}, 4^{K^2}-1]\!]$

(il faudrait vérifier que les intervalles $[\![4^{k^2}-2^{k^2}, 4^{k^2}+2^{k^2}]\!]$, $k\in\mathbb{N}$, sont deux à deux disjoints) donc $(*) = \displaystyle\sum_{m=4^{K^2}-2^{K^2}}^{4^{K^2}-1} \frac{1}{2K^2(4^{K^2}-m)} = \frac{1}{2K^2} \underbrace{\sum_{j=1}^{2^{K^2}} \frac{1}{j}}_{= \ln(2^{K^2})+\gamma+o(1)} \underset{K\to+\infty}{\sim} \frac{\ln(2)}{2} \underset{K\to+\infty}{\not\longrightarrow} 0$

$\ln(2^{K^2}) = K^2\ln(2)$

ce qui prouve que $(S_N(f)(0))_{N\in\mathbb{N}}$ diverge.

On a donc construit une fct° 2π pér. continue f qui n'est pas la somme de sa série de Fourier.