MAT 402 _ Feuille 4

Exercice 1

On peut traiter les séries entières a) à d) grâce au critère de d'Alembert :

(a) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne s'annule pas à partir du rang $n=1$, et

$\forall n\geq 1,\ \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+1}{n} = 1+\frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ donc d'après d'Alembert, le rayon de cv de la série entière est $R = \frac{1}{1} = 1$

(b) $\forall n\in\mathbb{N},\ a_n = n! \neq 0$, et $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!}{n!} = n+1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ donc d'après d'Alembert, $R = "\frac{1}{+\infty}" = 0$.

(c) $\forall n\in\mathbb{N}\ a_n = \frac{1}{n!} \neq 0$ et $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc d'après d'Alembert, $R = "\frac{1}{0}" = +\infty$.

(d) $\forall n\in\mathbb{N},\ a_n = \frac{n^n}{n!} \neq 0$ et $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \times \frac{n!}{n^n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{\cancel{(n+1)}\,n!} \times \frac{\cancel{n!}}{n^n}$

$$= \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e$$

donc d'après d'Alembert, $R = \frac{1}{e}$.

Pour (e), on peut utiliser cette fois-ci le critère de Cauchy (le TG contenant des "puissance n") : on pose toujours, $\forall n\in\mathbb{N},\ a_n = 2^{-n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$

Alors $\underset{\forall n\in\mathbb{N}^*}{,}\ |a_n|^{1/n} = 2^{-1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \longrightarrow \frac{e}{2}$. Donc d'après le critère de Cauchy, $R = \frac{1}{e/2} = \frac{2}{e}$.

Autres méthodes

(a) Si $|z|<1$, $\underset{\underset{<1}{n.|z|^n}}{|nz^n|} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ (croissances comparées) donc $\left(\sum nz^n\right)$ cv (par comparaison de séries à TG ≥ 0)

Ceci implique que le rayon de cv R est $\underline{\geq 1}$ (cours)

Si $|z|\geq 1$, $(nz^n)_n$ ne cv pas vers 0. Ceci entraîne que $\underline{R\leq 1}$ (cours)

Finalement, $\boxed{R=1}$

(b) $\forall z \in \mathbb{C}^* \quad |n!\, z^n| = n!\, |z|^n \longrightarrow +\infty$ (croissances comparées.

En effet, $n!\,|z|^n = (n|z|) \times ((n-1)|z|) \times \dots (1 \cdot |z|)$

et à partir d'un certain rang n_0, $n|z| \geqslant \alpha > 1$

Par suite, $n!\,|z|^n \geqslant \underbrace{\alpha^{n-n_0}}_{\to +\infty} \underbrace{n_0!\,|z|^{n_0}}_{\text{cste}}$)

Donc $(\sum a_n z^n)$ ne converge que pour $z = 0$. Donc $\underline{R = 0}$

(c) A l'inverse, toujours par croissances comparées, $\forall z \in \mathbb{C}, \ \frac{z^n}{n!} \longrightarrow 0$

donc $\left(\{ z \in \mathbb{C} : (\sum \frac{z^n}{n!}) \text{ cv} \} = \mathbb{C} \text{ donc} \right) \xrightarrow{\text{cours}} \underline{R = +\infty}$

Exercice 2 (a) • $(a_n \cdot 1^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée donc $\underline{R \geqslant 1}$

(cours : si pour un $z \in \mathbb{C}$ donné, $(a_n z^n)_n$ est borné alors $R \geqslant |z|$
on l'applique ici à $z = 1$)

• $(a_n \cdot 1^n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne tend pas vers 0 donc $\underline{R \leqslant 1}$
(cours : si pour un $z \in \mathbb{C}$ donné, $(a_n z^n)$ ne tend pas vers 0 alors $R \leqslant |z|$)

Finalement $\boxed{R = 1}$.

(b) • $(a_n \cdot 1^n)_{n \in \mathbb{N}}$ cv vers 0 donc $\underline{R \geqslant 1}$ (toujours même partie du cours)

• $(\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n \cdot 1^n)$ diverge donc $\underline{R \leqslant 1}$

Ainsi, $\boxed{R = 1}$.

Exercice 3 Fait en cours.

Exercice 4 $\underbrace{\left\{z\in\mathbb{C} : (a_n z^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée}\right\}}_{E_a} = \underbrace{\left\{z\in\mathbb{C} : (|a_n| z^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée}\right\}}_{E_{|a|}}$

(Rappel : une suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ est bornée s'il existe $M\in\mathbb{R}_+$ tq $\forall n\in\mathbb{N}, |b_n| \leq M$.

Or ici $|a_n z^n| = |a_n| \times |z|^n = \left| |a_n| z^n \right|$)

Or si R_a désigne le rayon de cv de $\left(\sum a_n z^n\right)$, d'après le cours
(resp $R_{|a|}$) (resp. $\sum |a_n| z^n$)

$$R_a = \sup\{|z|, z\in E_a\} = \sup\{|z|, z\in E_{|a|}\} = R_{|a|} \quad \text{CQFD.}$$

puisque ces 2 ensembles sont égaux !

Exercice 5 1) f est paire $\Leftrightarrow \forall x\in]-R,R[, \ f(x) = f(-x)$

$\Leftrightarrow$ " " $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (-x)^n$

$\Leftrightarrow$ " " $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{(-1)^n a_n}_{b_n} x^n$

$\Leftrightarrow \forall n\in\mathbb{N} \ a_n = b_n = (-1)^n a_n$

cours, unicité de la décomposition en série entière en 0

$\Leftrightarrow \forall n\in\mathbb{N}, \ a_n = \begin{cases} a_n \text{ si } n \text{ pair} & \text{(condition vide !)} \\ -a_n \text{ si } n \text{ impair} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \forall k\in\mathbb{N}, \ a_{2k+1} = -a_{2k+1}$

$\Leftrightarrow \underline{\forall k\in\mathbb{N}, \ a_{2k+1} = 0}$

2) Similaire.

3 - On sait (cours) que f est C^∞ sur $]-R,R[$ et que $\forall k \in \mathbb{N}$,

$$a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}.$$

En particulier, si $f^{(n)}$ est la fct° nulle (pour un certain $n \in \mathbb{N}$), alors $\forall k \geq n$, $f^{(k)}$ est aussi la fct° nulle, et donc $a_k = 0$.

Réciproquement, si $a_k = 0 \ \forall k \geq n$ (pour un certain n donné) alors $f : x \longmapsto \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k = \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k$ est un polynôme de degré $\leq n-1$, donc sa dérivée n-ième $f^{(n)}$ est la fonction nulle.

Autre méthode On sait que $f^{(n)}$ est la fonction $\begin{array}{l}]-R,R[\longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{k!}{n!} a_k x^{k-n} \end{array}$

Or par unicité (si existence) du DSE en 0, cette fonction est la fct° nulle ssi tous les coeff $\frac{k!}{n!} a_k$, $k \geq n$, sont nuls, ce qui conclut !

Exercice 6 1) On sait que $\forall y \in]-1,1[$, $\frac{1}{1-y} = \sum_{k=0}^{+\infty} y^k$

Soit $x \in]-1,1[$, alors $y := x^3 \in]-1,1[$, donc

$$\frac{1}{1-x^3} = \sum_{k=0}^{+\infty} (x^3)^k = \sum_{k=0}^{+\infty} x^{3k} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

avec $a_n = \begin{cases} 1 \text{ si } n \equiv 0 \ [3] \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$

2) $\forall x \in]-1,1[$

$$\frac{1}{1+x+x^2} = (1-x) \times \frac{1}{1-x^3} = (1-x) \sum_{k=0}^{+\infty} x^{3k}$$
$$= \sum_{k=0}^{+\infty} x^{3k} - x \sum_{k=0}^{+\infty} x^{3k}$$
$$= \sum_{k=0}^{+\infty} x^{3k} - \sum_{k=0}^{+\infty} x^{3k+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

avec $a_n = 1$ si $n \equiv 0 \ [3]$, -1 si $n \equiv 1 \ [3]$ et 0 sinon.

Exercice 7 (a) $\forall z \in \mathbb{C}$, $\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} 2^n z^{2n}\right)$ cv $\iff \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} (2z^2)^n\right)$ cv $\underset{\uparrow}{\iff}$ $|2z^2|<1$

série géométrique

$\iff |z| < \frac{1}{\sqrt{2}}$

Ainsi le domaine de cv est $\mathring{D}_{\mathbb{C}}(0, \frac{1}{\sqrt{2}})$, donc en particulier, le rayon de cv est $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

(b) Option 1 $\forall z \in \mathbb{C}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ $a_n z^n = \begin{cases} z^n \text{ si } n \text{ impair} \\ (2z)^n \text{ si } n \text{ pair} \end{cases}$

donc $(a_n z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée ssi $|2z| \leq 1$, ie $|z| \leq \frac{1}{2}$.

donc le rayon de cv R est $R = \sup\{|z|, (a_n z^n) \text{ bornée}\} = \frac{1}{2}$

Option 2 $a_n = b_n + c_n$ avec $b_n = \begin{cases} 1 \text{ si } n \text{ impair} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$ et $c_n = \begin{cases} 0 \text{ si } n \text{ impair} \\ 2^n \text{ sinon} \end{cases}$

On détermine le rayon de cv de $\left(\sum c_n z^n\right)$ comme pour (a) et on obtient $R_c = \frac{1}{2}$

Pour $\left(\sum b_n z^n\right)$, on peut à nouveau écrire, $\forall z \in \mathbb{C}$, $\left(\sum b_n z^n\right)$ cv $\iff \left(\sum_{k\in\mathbb{N}} z^{2k+1}\right)$ cv

$\iff \left(\sum (z^2)^k\right)$ cv

$\iff |z| < 1$

et on obtient $R_b = 1$

Comme ces deux rayons sont distincts, par thm de cours,

$R_a = \min(R_b, R_c) = \frac{1}{2}$

Mat402 - Feuille 4

Exercice 8 (correction alternative)

Notons R le rayon de cv de la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$

Soit $x \in \mathbb{C}$. • Si $|x| \geq 1$, $\left|\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right| \geq \frac{1}{2n+1}$ TG d'une série divergente, donc $\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right)$ diverge

Donc $R \leq 1$

• Si $|x| < 1$, $\frac{x^{2n+1}}{2n+1} = o\left(\frac{1}{(2n+1)^2}\right)$

$\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{4n^2}$ TG d'une série convergente.

donc par comparaison de séries à $TG \geq 0$ $\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right)$ cv

donc $R \geq 1$

Ainsi $R = 1$

En particulier, $f : x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ est définie et C^∞ sur $]-1,1[$, et sa dérivée s'obtient par dérivation terme à terme : $f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cancel{(2n+1)}x^{2n}}{\cancel{2n+1}} = \sum_{n=0}^{+\infty} (x^2)^n = \frac{1}{1-x^2}$

(DSE usuel de $u \longmapsto \frac{1}{1-u}$)

Comme $f(0) = 0$, f est donc la primitive s'annulant en 0 de $x \longmapsto \frac{1}{1-x^2}$.

Autrement dit, $f(x) = \int_0^x \frac{1}{1-t^2}\,dt$. Or $\forall t \in]-1,1[$, $\frac{1}{1-t^2} = \frac{1}{(1-t)(1+t)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t}\right)$

donc $f(x) = \left[\frac{1}{2}\left(-\ln(1-t) + \ln(1+t)\right)\right]_0^x$

ie $\boxed{f(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)}$ (-0)

Exercice 9 Préliminaires Pour toute fraction rationnelle (non nulle) $\frac{P}{Q} \in \mathbb{R}(X)$, ($P \in \mathbb{R}[X]$, $Q \in \mathbb{R}[X]$), $\left(\sum_{n \geq n_0} \frac{P(n)}{Q(n)} z^n\right)$ a pour rayon de cv $\boxed{1}$.

En effet, à partir d'un certain rg n_1, $P(n)$ et $Q(n) \neq 0$ (un polynôme a un nb fini de racines)

et si $a_n = \dfrac{P(n)}{Q(n)}$, $\forall n \geq n_1$, $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{P(n+1)}{P(n)} \times \dfrac{Q(n)}{Q(n+1)}$

$$\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{a_p (n+1)^p}{a_p n^p} \times \frac{b_q n^q}{b_q (n+1)^q}$$

où $a_p X^p$ et $b_q X^q$ sont les termes de + haut degré de P et Q resp.

$$\underset{n\to+\infty}{\sim} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{p-q} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 \text{ (quels que soient } p \text{ et } q\text{)}$$

et on conclut par la règle de d'Alembert.

Ainsi les rayons de cv de (a), (b) et (c) sont $\boxed{1}$.

a) $\forall x \in]-1,1[$, notons $f(x) = \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n(n-1)}$

Sur l'intervalle ouvert de cv, on peut dériver terme à terme :

$$f'(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{n-1}, \text{ puis } f''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} x^{n-2} = \sum_{k=0}^{+\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$$

Ainsi $f'(x) = \underset{\substack{\uparrow\\0}}{f'(0)} + \int_0^x \frac{dt}{1-t} = -\ln(1-x) \qquad (\forall x \in]-1,1[)$

et $f(x) = \underset{\substack{\uparrow\\0}}{f(0)} + \int_0^x -\ln(1-t)dt \underset{\substack{\uparrow\\ \text{chgt de var}\\ u=1-t}}{=} \int_1^{1-x} -\ln(u)(-du)$

$$= \Big[u\ln u - u\Big]_1^{1-x}$$

$$= (1-x)\ln(1-x) - (1-x) - 0 + 1$$

$$\boxed{f(x) = (1-x)\ln(1-x) + x}$$

Rq Ceci{est défini en -1}/se prolonge par continuité{par 1} en 1. Or la série de fct° $\sum_{n\geq 2} u_n$ avec $u_n : [-1,1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{x^n}{n(n-1)}$ CVN sur $[-1,1]$ ($\|u_n\|_\infty = \frac{1}{n(n-1)} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$ TG d'une série CV par Riemann)

donc $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est définie et C^0 sur $[-1,1]$, et coïncide ac f sur $]-1,1[$,

donc avec son prolongement par $C^{té}$ à $[-1,1]$

donc finalement, $\forall x \in [-1,1]$, $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n(n-1)} = \begin{cases} (1-x)\ln(1-x)+x & \text{si } x \neq 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$

(et cette somme n'est pas définie si $|x|>1$)

(Vérif $\frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$ donc par "télescopage" $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{2-1} = 1$)

(b) $\forall x \in]-1,1[$, posons $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \underset{\substack{\uparrow\\ 0 \text{ pour } n=0}}{n(n+1)} x^n = x \sum_{n=1}^{+\infty} n(n+1) x^{n-1}$

$$= x \underbrace{\sum_{k=0}^{+\infty} (k+1)(k+2) x^k}$$

$$= F''(x) \text{ où}$$

$$F(x) \underset{\uparrow}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

(thm de dérivation terme à terme)

donc $\boxed{f(x) = \frac{2x}{(1-x)^3} \quad \forall x \in]-1,1[}$

(Notons que cette fct° est définie en -1, mais pas $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ où $u_n : x \mapsto n(n+1)x^n$

$]-1,1[$ est le domaine de cv de la série entière étudiée.)

Exercice 12 L'énoncé aurait dû dire "développable en série entière en 0 sur $\mathbb{R}$",

ie de la forme $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ avec $\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n\right)$ série entière de rayon de cv $+\infty$

Une telle fonction a pour dérivée $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$ et satisfait donc,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) + 2x f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{+\infty} 2 a_n x^{n+1}$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} (k+1) a_{k+1} x^k + \sum_{j=1}^{+\infty} 2 a_{j-1} x^j$$

$$= \underset{(k=0)}{a_1} + \sum_{k=1}^{+\infty} \left((k+1) a_{k+1} + 2 a_{k-1}\right) x^k$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} b_k x^k \quad \text{avec} \quad b_0 = a_1$$
$$\text{et } \forall k \geq 1,\ b_k = (k+1) a_{k+1} + 2 a_{k-1}$$

Ainsi, f est solution de l'E.D. $y' + 2xy = 0$ ssi :

$\iff \forall x \in \mathbb{R}, \quad \sum_{k=0}^{+\infty} b_k x^k = 0$

$\iff \forall k \in \mathbb{N},\ b_k = 0$

↑ thm d'unicité du DSE en 0

$\iff a_1 = 0$ et $\forall k \in \mathbb{N}, \quad a_{k+1} = \dfrac{-2 a_{k-1}}{k+1}$

$\iff a_1 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad a_{n+2} = \dfrac{-2}{n+2} a_n$

$\iff \forall k \in \mathbb{N}, \quad a_{2k+1} = 0$ et $a_{2k+2} = \dfrac{-2}{2k+2} a_{2k}$, ie $a_{2(k+1)} = \dfrac{-1}{k+1} a_{2k}$

($\Rightarrow$ une récurrence immédiate montre que ts les termes impairs sont nuls)

$$\iff \forall k \in \mathbb{N}, \quad \left\{ \begin{array}{l} a_{2k} = \dfrac{(-1)^k}{k!} a_0 \\ \\ a_{2k+1} = 0 \end{array} \right\} (*)$$

↑ récurrence immédiate

Etant donné $a_0 \in \mathbb{R}$, étudions le rayon de cv de la série entière $\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n\right)$ avec $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfaisant $(*)$:

$$\forall z \in \mathbb{C}, \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n\right) \text{cv} \iff \left(\sum_{k\in\mathbb{N}} a_{2k} z^{2k}\right) \text{cv} \iff \left(\sum_{k\in\mathbb{N}} a_0 \frac{(-z^2)^k}{k!} \text{ cv}\right)$$

Or on sait que cette dernière série cv $\forall z \in \mathbb{C}$, et a pour somme $a_0 \exp(-z^2)$.
Le rayon de cv recherché est donc $+\infty$.

Finalement, on a montré que les solutions développables en série entière en 0 sur $\mathbb{R}$ de l'équation diff. donnée sont les fonctions

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto a_0 \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!} x^{2k} = a_0 e^{-x^2} \end{aligned}, \text{avec } a_0 \in \mathbb{R},$$

ie les multiples réels de la fonction $f: \begin{aligned} \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto e^{-x^2} \end{aligned}$

<u>Remarque</u> On a en fait déterminé ainsi <u>toutes</u> les solutions (DSE ou non) de l'ED sur $\mathbb{R}$. En effet, la théorie des ED affirme que, pour cette équation, qui est linéaire d'ordre 1 sans second membre (ie "homogène"), l'ensemble des solutions est un sous-espace vectoriel de dimension 1 de $\mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$, engendré par n'importe quelle solution non nulle. Ici f est une solution non nulle, donc $Sol(E) = \{\lambda \times f, \lambda \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\{f\}$, ie l'ensemble des fct° DSE que nous avons trouvé ci-dessus.

Exercice 14

1) f est dérivable sur $]-1,1[$ par quotient et composition et

$\forall x \in]-1,1[$, $(x-1) f(x) = \ln(1-x)$, ce qui donne par dérivation

$$f(x) + (x-1) f'(x) = -\frac{1}{1-x}, \text{ ie } (1-x) f'(x) - f(x) = \frac{1}{1-x} \quad (*)$$

2) a) Par thm sur la dérivée de sommes de séries entières,

$\forall x \in]-s,s[$, $f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$, donc

$$(1-x) f'(x) - f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1+1} - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

chgt d'indice ; (1er terme nul)

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} (k+1) a_{k+1} x^k - \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

indice muet

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \left((n+1) a_{n+1} - n a_n - a_n \right) x^n$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)(a_{n+1} - a_n) x^n .$$

Comme en outre $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$, le fait qu'on ait $(*)$ pour tout $x \in]-s,s[$ avec $s>0$ implique, par unicité du DSE en 0 (si existence) que $\forall n \in \mathbb{N}$, $(n+1)(a_{n+1} - a_n) = 1$, ie $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{n+1}$

b) $a_0 = f(0) = \frac{\ln(1-0)}{0-1} = 0$

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = \sum_{k=0}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+1} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j}$

c) • $a_n 1^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$ donc $R \leq 1$

• $|a_n| \leq n$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$, donc $(a_n z^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée $\forall z$ tq $|z|<1$ par croissances comparées.

donc $R \geq 1$. Finalement $\underline{R=1}$

3) Il y a plusieurs réponses possibles (comme souvent !)

Option 1 • f est solution de $(**)\begin{cases}(1-x)y' - y = \dfrac{1}{1-x} & \text{sur }]-1,1[\\ y(0)=0\end{cases}$

• la fct° $g : x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, avec $a_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*\ a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ sur $]-1,1[$

est bien définie et dérivable, et également solution de $(**)$

(on ne l'a pas démontré, mais il suffit pour cela de "remonter" les calculs précédents)

• la théorie des équa-diff affirme que $(**)$ admet une unique solution (pour cela, il faudrait observer que le coeff devant y', $(1-x)$, ne s'annule pas sur $]-1,1[$)

Ainsi $f = g$, et on a donc bien obtenu un DSE de f sur $]-1,1[$ en 0.

Option 2 f est développable en série entière en 0 comme produit de telles fonctions ($x \mapsto \ln(1-x)$ et $x \longmapsto \frac{1}{x-1} = -\frac{1}{1-x}$)

donc on savait au début de la q. 2 qu'il existait (a_n) tq...

et on a déterminé ces a_n. Ce qu'on a obtenu est donc bien un DSE de f

4) $\forall x \in]-1,1[$, $-\ln(1-x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$ avec $\begin{cases} b_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ b_n = \frac{1}{n}\end{cases}$

et $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$ avec $c_n = 1\ \forall n \in \mathbb{N}$.

D'après le cours, $f(x) = -\ln(1-x) \times \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} d_n x^n \quad \forall x \in]-1,1[$

avec $\forall n \in \mathbb{N}\quad d_n = \sum_{k=0}^{n} b_k c_{n-k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$, ce qui redonne

bien le résultat précédent.