Mat402 - Feuille 4

Exercice 8 (correction alternative)

Notons R le rayon de cv de la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$

Soit $x\in\mathbb{C}$. • Si $|x|\geq 1$, $\left|\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right| \geq \frac{1}{2n+1}$ TG d'une série divergente, donc $\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right)$ diverge

Donc $R\leq 1$

• Si $|x|<1$, $\frac{x^{2n+1}}{2n+1} = o\left(\frac{1}{(2n+1)^2}\right)$

$\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{4n^2}$ TG d'une série convergente.

donc par comparaison de séries à TG ≥ 0 $\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right)$ cv

donc $R\geq 1$

Ainsi $R=1$

En particulier, $f : x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ est définie et C^∞ sur $]-1,1[$, et sa dérivée s'obtient par dérivation terme à terme : $f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cancel{(2n+1)}x^{2n}}{\cancel{2n+1}} = \sum_{n=0}^{+\infty} (x^2)^n = \frac{1}{1-x^2}$

(DSE usuel de $u\longmapsto \frac{1}{1-u}$)

Comme $f(0)=0$, f est donc la primitive s'annulant en 0 de $x\longmapsto \frac{1}{1-x^2}$.

Autrement dit, $f(x) = \int_0^x \frac{1}{1-t^2}\,dt$. Or $\forall t\in]-1,1[$, $\frac{1}{1-t^2} = \frac{1}{(1-t)(1+t)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t}\right)$

donc $f(x) = \left[\frac{1}{2}\left(-\ln(1-t) + \ln(1+t)\right)\right]_0^x$

ie $\boxed{f(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)}$ (-0)