Exercice 10

1. $\forall x, y \in [0,1[$, si $x \leq y$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $x^n \leq y^n$ (croissance de $x \mapsto x^n$ sur $\mathbb{R}_+$)

puis $a_n x^n \leq a_n y^n$ (car $a_n \geq 0$)

Ainsi, $\forall N \in \mathbb{N}$, en sommant ces inégalités,

$$\sum_{n=0}^{N} a_n x^n \leq \sum_{n=0}^{N} a_n y^n$$

Puis par passage à la limite qd $N \to +\infty$

$$f(x) \leq f(y).$$

f est donc croissante sur $[0,1[$.

Alternative : f est C^∞ sur $]-1,1[$ comme somme de série entière de rayon 1,

et $\forall x \in]-1,1[$, $f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$

En particulier, $\forall x \in [0,1[$, comme $\forall n \geq 1$, $a_n \geq 0$ et $x^{n-1} \geq 0$,

$$f'(x) \geq 0$$

Ainsi, f est croissante sur $[0,1[$.

En particulier, soit f est majorée sur $[0,1[$, et alors elle admet une limite finie en 1^-, soit elle n'est pas majorée, et alors $\lim_{x \to 1^-} f(x) = +\infty$.

2) a) Soit $x \in]0,1[$. $(S_N(x))_{N \in \mathbb{N}}$ est croissante car $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n x^n \geq 0$.

Sa limite étant par définition $f(x)$, on a : $\forall N \in \mathbb{N}$, $S_N(x) \leq f(x)$

En outre, f étant croissante sur $]0,1[$, $f(x) \leq \lim_{1^-} f = \lambda$

Ainsi, par transitivité, $\forall N \in \mathbb{N}$, $S_N(x) \leq \lambda$.

Fixons $N \in \mathbb{N}$. On a donc, $\forall x \in]0,1[$, $S_N(x) \leq \lambda$. $(*)$

Or S_N est définie et continue sur $\mathbb{R}$, donc en particulier $S_N(1) = \lim_{x \to 1^-} S_N(x)$

donc par passage à la limite dans l'inégalité $(*)$, $S_N(1) \leq \lambda$

(b) $(S_N(1))_{N\in\mathbb{N}}$ est croissante (suite des sommes partielles d'une série à TG ≥ 0) et majorée par λ, elle est donc convergente, ce qui signifie précisément ($S_N(1) = \sum_{m=0}^{N} a_m$) que $(\sum a_n)$ converge.

On $\forall x \in [-1,1]$, $|a_n x^n| \leq |a_n| = a_n$, TG d'une série cv comme on vient de le dire,

donc la série entière CVN sur $[-1,1]$.

(c) On peut donc étendre la définition de f à $[-1,1]$ et par thm de continuité ($u_n : x \mapsto a_n x^n$ est $\mathcal{C}^0$ sur $[-1,1]$ et $(\sum u_n)$ CVN donc CVU sur $[-1,1]$), f est continue sur $[-1,1]$. En particulier $\lim_{x\to 1^-} f(x) = f(1) = \lambda$.

or $f(1) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$, ce qui conclut.

3) Si la série $(\sum a_n)$ convergeait, on aurait comme dans (b) que la série entière converge normalement donc uniformément sur $[-1,1]$. On pourrait alors encore une fois étendre la déf de f à $[-1,1]$, et l'application obtenue serait continue, et en particulier aurait une limite finie en 1 ce qui est contraire à l'hypothèse de la question. La série diverge donc

On a donc montré que $\lim_{x\to 1^-} f(x)$ est finie $\Longleftrightarrow (\sum a_n)$ cv

et si lorsque l'une (ou/et l'autre du coup) de ces propriétés est satisfaite,

$$\underbrace{\lim_{x\to 1^-} f(x)}_{= \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n} = \underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} a_n}_{= \lim_{x\to 1^-} a_n x^n}$$