Corrigé DM2 MAT-402

(Feuille 2, exercices 6-7-9)

Exercice 6 Hypothèses :
- (f_n) CVU vers f sur $[a,b]$
- $\forall n$, f_n est C^0 sur $[a,b]$
- $(x_n)_n$ CV vers $l \in [a,b]$

$(x_n)_n \in [a,b]^{\mathbb{N}}$

But : $\left(f_n(x_n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ CV vers $f(l)$, ie : $\forall \varepsilon>0, \exists N\in\mathbb{N}, \forall n\geq N, |f_n(x_n)-f(l)| \leq \varepsilon$.

On commence par remarquer que : $\forall n\in\mathbb{N}$ $|f_n(x_n)-f(l)| = |(f_n(x_n)-f(x_n)) + (f(x_n)-f(l))|$
$\leq |f_n(x_n)-f(x_n)| + |f(x_n)-f(l)|$

On fixe $\varepsilon>0$. ① Par CVU de $(f_n)_n$ vers f sur $[a,b]$, il existe $N_1\in\mathbb{N}$ tq :

$$\forall n\geq N_1, \quad \|f_n-f\|_{\infty,[a,b]} \leq \varepsilon/2$$

En particulier, comme $x_n\in[a,b]$ $\forall n\in\mathbb{N}$,

$$\forall n\geq N_1, \quad |f_n(x_n)-f(x_n)| \leq \|f_n-f\|_{\infty,[a,b]} \leq \varepsilon/2$$

② f est continue sur $[a,b]$ comme limite uniforme de fonctions continues sur $[a,b]$.
En particulier f est continue en l donc, comme $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l$, $f(x_n)\xrightarrow[n\to+\infty]{} f(l)$.
Il existe donc $N_2\in\mathbb{N}$ tq : $\forall n\geq N_2$, $|f(x_n)-f(l)|\leq \varepsilon/2$

Bilan Posons $N=\max(N_1,N_2)$. On a alors :

$$\forall n\geq N, \quad |f_n(x_n)-f(l)| \leq \underbrace{|f_n(x_n)-f(x_n)|}_{\substack{\leq \varepsilon/2 \\ \text{car } n\geq N_1}} + \underbrace{|f(x_n)-f(l)|}_{\substack{\leq \varepsilon/2 \\ \text{car } n\geq N_2}}$$

$$\leq \varepsilon. \quad \text{CQFD}.$$

Exercice 7 1) Soit $x \in \mathbb{R}$.

Si $x \neq 0$, $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{2^n x}{n 2^n x^2} = \dfrac{1}{nx} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, donc $f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

Si $x=0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) = 0$, donc $f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Ainsi $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction nulle, que l'on notera f

2) On remarque que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $f_n\Big(\underbrace{\tfrac{1}{\sqrt{n2^n}}}_{\text{choisi pour rendre le dénominateur constant}}\Big) = \dfrac{2^n/\sqrt{n2^n}}{1+1} = \dfrac{2^{n-\frac{n}{2}}}{2\sqrt{n}} = \dfrac{(\sqrt{2})^n}{2\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ par croissances comparées

A fortiori, $\|f_n - f\|_{\infty,\mathbb{R}} = \|f_n\|_{\infty,\mathbb{R}} \underset{n\to+\infty}{\not\longrightarrow} 0$, donc la cv n'est pas uniforme.

Méthode 2 Calcul explicite de $\|f_n\|_{\infty,\mathbb{R}}$:

$\forall n \in \mathbb{N}$, f_n est C^∞ (fonction rationnelle) sur $\mathbb{R}$ (le dénominateur ne s'annule pas)

et $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_n'(x) = \dfrac{2^n(1+n2^nx^2) - 2^n x \times 2n2^n x}{(1+n2^nx^2)^2}$

$$= \frac{2^n - n4^nx^2}{(1+n2^nx^2)^2}$$

Ainsi, $f_n'(x) \geq 0 \iff n4^nx^2 \leq 2^n$

$\iff x^2 \leq \dfrac{1}{n2^n}$

$\iff |x| \leq \dfrac{1}{\sqrt{n2^n}} \iff -\dfrac{1}{\sqrt{n2^n}} \leq x \leq \dfrac{1}{\sqrt{n2^n}}$

En outre, $f_n(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{2^n x}{n2^nx^2} = \dfrac{1}{nx} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$. En notant que f_n est impaire, on obtient le tableau de variations :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{\sqrt{n2^n}}$		$\frac{1}{\sqrt{n2^n}}$		$+\infty$
$f_n'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
f_n	0	↘		↗		↘	0

$|f_n|$ (ne pas oublier la valeur absolue) admet donc pour maximum sur $\mathbb{R}$:

$\left|f_n\left(\dfrac{1}{\sqrt{n2^n}}\right)\right| = \left|f_n\left(-\dfrac{1}{\sqrt{n2^n}}\right)\right| = \dfrac{(\sqrt{2})^n}{2\sqrt{n}}$,

et on conclut comme précédemment.

Méthode 3 On peut calculer $\int_0^1 f_n(t)\,dt$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ et montrer que $\int_0^1 f_n(t)\,dt \underset{n\to+\infty}{\not\longrightarrow} \int_0^1 f(t)\,dt = 0$

mais ce n'est pas une méthode très naturelle...

Exercice 9   1). Si $x \in [0,1[$, $x^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ (suite géométrique), donc $x^n(1-x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

et par continuité de la fonction sin, $f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sin(0)=0$.

• Si $x=0$, $\forall n\in\mathbb{N}$, $f_n(x)=0 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

Ainsi, (f_n) converge simplement vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}$, que l'on note f.

2) $\forall n\in\mathbb{N}^*$, f_n est C^∞ par composition, et $\forall x\in\mathbb{R}$, $f_n'(x)= u_n'(x)\cos u_n(x)$,

où $u_n : x \longmapsto x^n(1-x)$, de dérivée $u_n' : x \longmapsto nx^{n-1}-(n+1)x^n$

$\forall x\in[0,1]$, $x^n(1-x)\in[0,1]$ donc $\cos(x) \geqslant \cos(\underbrace{1}_{\leq \frac{\pi}{2}})$, donc $f_n'(x)$ est du signe de $u_n'(x)$,

et $u_n'(x)\geqslant 0 \iff \underbrace{nx^{n-1}}_{\geqslant 0}\left(1-\frac{n+1}{n}x\right)\geqslant 0$

$\iff \frac{n+1}{n}x \leq 1$

$\iff x \leq \frac{n}{n+1} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-1}$

On obtient finalement le tableau de variations :

x	0	$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-1}$	1
$f_n'(x)$		0	
f_n	0 ↗		↘ 0

Ainsi f_n est positive sur $[0,1]$ et

$$\|f_n\|_{\infty,[0,1]} = \max_{[0,1]} f_n = f_n\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-1}\right)$$

$$= \sin\Bigg(\underbrace{\underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n}}_{\in[0,1]}\underbrace{\left(1-\frac{n}{n+1}\right)}_{\frac{1}{n+1}}}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0}\Bigg)$$

Donc à nouveau par continuité de sin en 0,

$\|f_n\|_{\infty,[0,1]} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, ie $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ CVU vers la fonction nulle sur $[0,1]$.

3) • $\forall n\in\mathbb{N}$, f_n est C^0 sur $[0,1]$
• (f_n) CVU vers f sur $[0,1]$

donc par le thm du cours, $\left(\int_0^1 f_n(t)\,dt\right)_{n\in\mathbb{N}}$ CV vers $\int_0^1 f(t)dt=0$

4) Reprenons la formule : $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\forall x\in[0,1]$, $f_n'(x)= nx^{n-1}\left(1-\frac{n+1}{n}x\right)\cos\left(x^n(1-x)\right)$

• Si $x\in[0,1[$, $\cos(x^n(1-x)) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \cos 0 = 1$ par continuité de cos, $1-\frac{n+1}{n}x \xrightarrow[n\to\infty]{} 1-x$ et

$nx^{n-1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ par croissances comparées donc $f_n'(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ par produit.

• Si $x=1$: $f_n'(1) = n\left(1-\frac{n+1}{n}\right)\cos(0) = -1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} -1$

Ainsi, (f_n') CVS vers la fonction $g : [0,1] \to \mathbb{R}$, $x \longmapsto 0$ si $x<1$, -1 si $x=1$.

5) La cv n'est pas uniforme car $\forall n$, f_n' est C^0 mais g ne l'est pas.