8

$$S_{p,m}(x) = \sum_{k=p}^{m} \cos(kx) = \sum_{k=p}^{m} Re\left(e^{ikx}\right) = Re\left(\sum_{k=p}^{m} \left(e^{ix}\right)^k\right)$$

$$= Re\left(\frac{e^{ipx} - e^{i(n+1)x}}{1 - e^{ix}}\right)$$

(série géométrique de raison $e^{ix} \neq 1$ car $x \notin 2\pi\mathbb{Z}$)

$$= Re\left(\frac{e^{i\left(\frac{p+n+1}{2}\right)x}}{e^{\frac{ix}{2}}} \times \frac{e^{i\frac{p-(n+1)}{2}x} - e^{i\frac{(n+1)-p}{2}x}}{e^{-\frac{ix}{2}} - e^{\frac{ix}{2}}}\right)$$

$$= Re\left(e^{i\frac{(p+m)}{2}x} \times \frac{\cancel{2i} \sin\left(\frac{p-(m+1)}{2}x\right)}{\cancel{2i} \sin\left(\frac{-x}{2}\right)}\right)$$

Donc
$$\left|S_{p,m}(x)\right| \leq \underbrace{\left|e^{i\frac{(p+n)}{2}x}\right|}_{=1} \times \frac{\overbrace{\left|\sin\left(\frac{p-(n+1)}{2}x\right)\right|}^{\leq 1}}{\left|\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right|}$$

et donc
$$\left|S_{p,m}(x)\right| \leq \frac{1}{\left|\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right|},$$
ce qu'on voulait.

2. Posons, $\forall m \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \frac{1}{\sqrt{m+x}}$ et $b_m = \cos(mx)$ (x est fixé)

de sorte que $\forall m \geq p$, $b_m = S_{p,m}(x) - S_{p,m-1}(x)$ (avec par convention $S_{p,p-1}(x) = 0$)

Alors
$$\sum_{n=p}^{p+q} v_m(x) = \sum_{n=p}^{p+q} a_n b_m = \sum_{n=p}^{p+q} a_n\left(S_{p,m}(x) - S_{p,m-1}(x)\right)$$

$$= \sum_{n=p}^{p+q} a_n S_{p,m}(x) - \sum_{n=p}^{p+q} a_n S_{p,m-1}(x)$$

chgt d'indice $k = m-1$

$$= \quad " \quad - \sum_{k=p-1}^{p+q-1} a_{k+1} \underbrace{S_{p,k}(x)}_{\text{nul pour } k=p-1}$$

$$= a_{p+q} S_{p,p+q}(x) + \sum_{n=p}^{p+q-1} \left(a_n - a_{n+1}\right) S_{p,m}(x)$$

ce qui est précisément l'égalité demandée en remplaçant les a_k par leur valeur.

I, on a donc $\left|\sum_{n=p}^{p+q} v_n(x)\right| \leq \sum_{n=p}^{p+q-1} |S_{p,n}(x)| \cdot \left|\frac{1}{\sqrt{n+x}} - \frac{1}{\sqrt{n+1+x}}\right| + \frac{|S_{p,p+q}(x)|}{\sqrt{p+q+x}}$

par inégalité triangulaire

$$\leq \frac{1}{\left|\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right|}\left(\underbrace{\sum_{n=p}^{p+q-1}\underbrace{\left|\frac{1}{\sqrt{n+x}} - \frac{1}{\sqrt{n+1+x}}\right|}_{=\frac{1}{\sqrt{n+x}} - \frac{1}{\sqrt{n+1+x}}}}_{\text{(somme télescopique)}} + \frac{1}{\sqrt{p+q+x}}\right)$$

d'après 1.
car $x \in I$
donc $x \notin 2\pi\mathbb{Z}$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{p+x}} - \cancel{\frac{1}{\sqrt{p+q+x}}}\right) + \cancel{\frac{1}{\sqrt{p+q+x}}}$$

Ce qui donne le résultat demandé.

or sur $I = [\alpha, 2\pi - \alpha]$, $x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{p+x}}$ est positive et décroissante donc

$$\forall x \in I, \left|\frac{1}{\sqrt{p+x}}\right| \leq \frac{1}{\sqrt{p+\alpha}}$$

et $x \mapsto \left|\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right|$ a pour variations :

$$\begin{array}{c|ccccc} x & \alpha & & \pi & & 2\pi-\alpha \\ \hline \sin\left(\frac{x}{2}\right) & & & 1 & & \\ & & \nearrow & & \searrow & \\ & \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)>0 & & & & \sin\left(\pi-\frac{\alpha}{2}\right)=\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)>0 \end{array}$$

Donc $\forall x \in I$, $\frac{1}{\left|\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right|} \leq \frac{1}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$

Finalement $\forall\, p, q \in \mathbb{N}^*, \forall x \in I, \left|\sum_{n=p}^{p+q} v_n(x)\right| \leq \frac{1}{\sqrt{p+\alpha}\,\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$

ie $\left\|\sum_{n=p}^{p+q} v_n\right\|_{\infty, I} \leq \frac{1}{\sqrt{p+q}\,\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \xrightarrow[p\to+\infty]{} 0$

Ceci montre que $\left(\sum_{n\geq 1} v_n\right)$ est uniformément de Cauchy sur I,

Ce qui implique que $\left(\sum_{n\geq 1} v_n\right)$ converge uniformément sur I, ce qu'on voulait.

Exercice 9 1. Posons, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$

$$x \longmapsto \frac{1}{x(x+1)\dots(x+n)} = \frac{1}{\prod_{k=0}^{n}(x+k)}$$

- $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n(x) > 0$, donc si $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$ existe (ie si la série $\left(\sum_n u_n(x)\right)$ est convergente) $f(x)$ est automatiquement > 0.

- Pour montrer que f est bien définie et C^0, étudions la convergence normale de $\left(\sum_n u_n\right)$. Elle ne peut avoir lieu sur $\mathbb{R}_+^*$ car aucune des fonctions u_n n'est bornée sur cet intervalle ($\lim_{x \to 0^+} u_n(x) = \lim_{x\to 0^+} \underline{\underline{\frac{1}{x}}} \times \frac{1}{x+1} \times \dots \times \frac{1}{x+n}$

$= \frac{1}{n!} \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$)

Mais la CVN sur $[a, +\infty[$, $\forall a > 0$, nous suffit (cf conclusion)

Soit donc $a > 0$. $\forall x \in [a, +\infty[$, $|u_n(x)| = \frac{1}{\prod_{k=0}^{n}|x+k|} \leq \frac{1}{\prod_{k=0}^{n}(a+k)} \leq \frac{1}{a}\frac{1}{\prod_{k=1}^{n} k}$

$= \frac{1}{a} \times \frac{1}{n!}$

indépᵗ de x et TG d'une série numérique convergente (de somme $\frac{e}{a}$)

Donc on a bien CVN sur $[a, +\infty[$.

En particulier, $\left(\sum_n u_n\right)$ CVS sur $[a, +\infty[$, donc f est bien définie.

En outre, $\forall n \in \mathbb{N}$, u_n est rationnelle donc continue sur $[a, +\infty[$.

Par thm de continuité (comme CVN $\Rightarrow$ CVU), $f = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est C^0 sur $[a, +\infty[$.

Ceci étant vrai pour tout $a > 0$, f est finalement définie et continue sur $\bigcup_{a>0} [a, +\infty[= \mathbb{R}_+^*$ (et à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$, déjà vu).

2) Soit $x > 0$. (alors $x+1 > 0$ donc $f(x+1)$ bien défini)

$$u_n(x+1) = \prod_{k=0}^{n} \frac{1}{(x+1+k)} = \prod_{j=1}^{n+1} \frac{1}{x+j} = x \prod_{j=0}^{n+1} \frac{1}{x+j}$$

$$= x\, u_{n+1}(x)$$

Donc $\underline{f(x+1)} = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x+1) = \sum_{n=0}^{+\infty} x\, u_{n+1}(x) = x\Big(f(x) - \overbrace{u_0(x)}^{1/x}\Big)$

$$\underline{= x f(x) - 1}$$

3. $\forall n \in \mathbb{N}$, u_n est rationnelle donc C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$, et >0. Pour majorer sa dérivée, il peut être judicieux de remarquer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad \ln(u_n(x)) = \ln\left(\prod_{k=0}^{n} \frac{1}{x+k}\right) = \sum_{k=0}^{n} \ln(x+k)$$

Donc
$$\frac{u_n'(x)}{u_n(x)} = (\ln(u_n))'(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{x+k}$$

Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\quad |u_n'(x)| = \left|\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{x+k}\right| \times |u_n(x)| = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{x+k} \times u_n(x)$

Encore une fois, u_n' n'est pas bornée sur $\mathbb{R}_+^*$. Fixons donc $a>0$

Alors $\forall x \in [a,+\infty[$, $\quad |u_n'(x)| \leq \sum_{k=0}^{n} \underbrace{\frac{1}{a+k}}_{\leq \frac{1}{a}} \times \|u_n\|_{\infty,[a,+\infty[}$

$$\leq \frac{n}{a} \times \frac{1}{a\,n!} = \underbrace{\begin{cases} 0 & \text{si } n=0 \\ \dfrac{1}{a^2(n-1)!} & \text{si } n \geq 1 \end{cases}}_{\substack{\text{indépendant de } x \text{ et à} \\ \text{nouveau terme général} \\ \text{d'une série numérique} \\ \text{convergente (de somme } \frac{e}{a^2})}}$$

Ceci prouve la convergence normale de $\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n'\right)$ sur $[a,+\infty[$ (donc la CVU)

Les 3 hyp du thm de dérivabilité (sur $[a,+\infty[$) sont satisfaites (u_n C^1 $\forall n$, $\sum u_n$ CVS, $\sum u_n'$ CVU) donc f est C^1 sur $[a,+\infty[$, et ce pour tout $a>0$, donc f est C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ (et en particulier dérivable, de dérivée $f' : x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} u_n'(x)$).

4. $\forall x<y \in \mathbb{R}_+^*$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\quad u_n(x) > u_n(y)$ (immédiat)

donc $f(x) - f(y) = \sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{(u_n(x) - u_n(y))}_{>0} > 0$, ie $f(x) > f(y)$

donc f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

- On a vu que $\forall x>0$, $f(x+1) = x f(x) - 1$, ou encore

$$f(x) = \frac{1}{x}\left(f(x+1)+1\right)$$

or f étant continue en 1 d'après 1., $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x+1) = f(1) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)!}$

$$= e-1$$

Donc $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x+1)+1 = e \neq 0$ et finalement $f(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} \frac{e}{x}$.

- f est $\searrow$ et $\geqslant 0$ donc admet une limite $l \geqslant 0$ en $+\infty$.

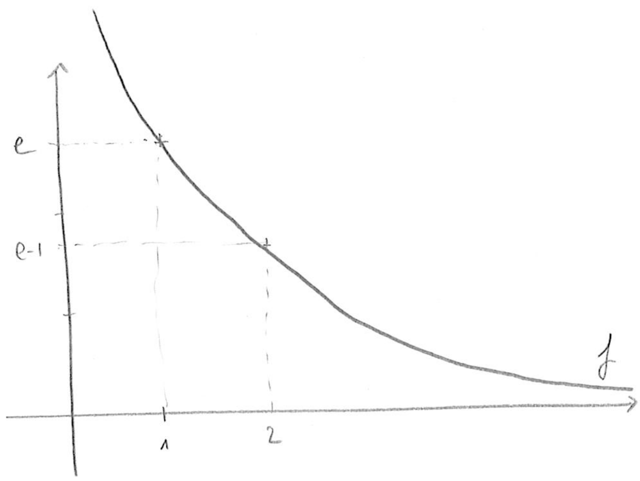
Mais alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x+1)+1 = l+1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \underbrace{\frac{1}{x}\left(f(x+1)+1\right)}_{=f(x)} = 0$

Ainsi $l=0$.

"$f(x) = \frac{1}{x}\left(f(x+1)+1\right)$" donne donc $f(x) \underset{x\to+\infty}{=} \frac{1}{x}\left(o(1)+1\right)$

Autrement dit $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x}$.

5.



Exercice 10 1. Pour $n=0$, u_n est constante donc continue sur $[0,1]$

Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, u_n est C^0 sur $]0,1]$ comme produit de fonctions continues, et $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln(x)=0$ (croissances comparées)

donc $\lim\limits_{x\to 0^+} u_n(x) = 0 = u_n(0)$ donc u_n est également continue en 0,

et donc finalement sur $[0,1]$.

2. Soit $a\in]0,1[$ et $n\in\mathbb{N}^*$. $\displaystyle\int_a^1 (x\ln x)^n dx = \int_a^1 x^n(\ln x)^n dx$

posons $u: x\mapsto \frac{x^{n+1}}{n+1}$, C^1 sur $[a,1]$, de dérivées $u': x\mapsto x^n$

$v: x\mapsto (\ln x)^n$ $\qquad v': x\mapsto \frac{n}{x}(\ln x)^{n-1}$

On a donc par IPP $\displaystyle\underbrace{\int_a^1 x^n(\ln x)^n dx}_{\to \int_0^1 (x\ln x)^n dx} = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}(\ln x)^n\right]_a^1 - \int_a^1 \frac{x^{n+1}}{n+1}\times\frac{n}{x}(\ln x)^{n-1}dx$

$\displaystyle = \underbrace{-\frac{a^{n+1}}{n+1}\ln(a)^n}_{\xrightarrow[a\to 0]{} 0} - \frac{n}{n+1}\int_a^1 \underbrace{x^n(\ln x)^{n-1}}_{\text{prolongeable par } c^{té} \text{ en } 0} dx$

Plus généralement, en posant pour $p\in\mathbb{N}$, $p\leq n$ $\displaystyle I_p = \int_0^1 x^n(\ln(x))^p dx$ (bien défini tj par prolongement par continuité), on peut montrer par IPP

que $\begin{cases} \text{pour } p\geq 1 \quad I_p = -\frac{p}{n+1} I_{p-1} \\ \text{et } I_0 = \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}\end{cases}$

On obtient donc par récurrence que $I_n = (-1)^n \frac{n!}{(n+1)^{n+1}}$

et donc que $\displaystyle\int_0^1 u_n(x)dx = \frac{(-1)^n}{n!} I_n = \frac{1}{(n+1)^{n+1}}$

3) Étudions les variations de $f : x \longmapsto \begin{cases} x \ln x & \text{si } x>0 \\ 0 & \text{si } x=0 \end{cases}$ sur $[0,1]$

f est dérivable sur $]0,1]$, de dérivée $f' : x \longmapsto \ln x + 1$

donc $\forall x \in]0,1]$, $f'(x) > 0 \iff 1 + \ln x > 0 \iff \ln x > -1 \iff x > e^{-1}$

D'où le tableau de variations :

x	0		e^{-1}		1
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	0	$\searrow$	$-e^{-1}$	$\nearrow$	0

Donc $\|f\|_{\infty,[0,1]} = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)| = e^{-1}$

Par suite, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in [0,1]$, $|u_n(x)| \leq \underbrace{\frac{e^{-n}}{n!}}_{}\leq \frac{1}{n!}$

indépendant de x et TG d'une série numérique CV.

Ceci montre la CVN de $\left(\sum_n u_n\right)$ sur $[0,1]$.

$$\forall x > 0, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) = \underbrace{u_0(x)}_{1} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n (x \ln x)^n}{n!}$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-x\ln x)^n}{n!} = e^{-x\ln x} = \frac{1}{e^{x \ln x}} = \frac{1}{x^x}$$

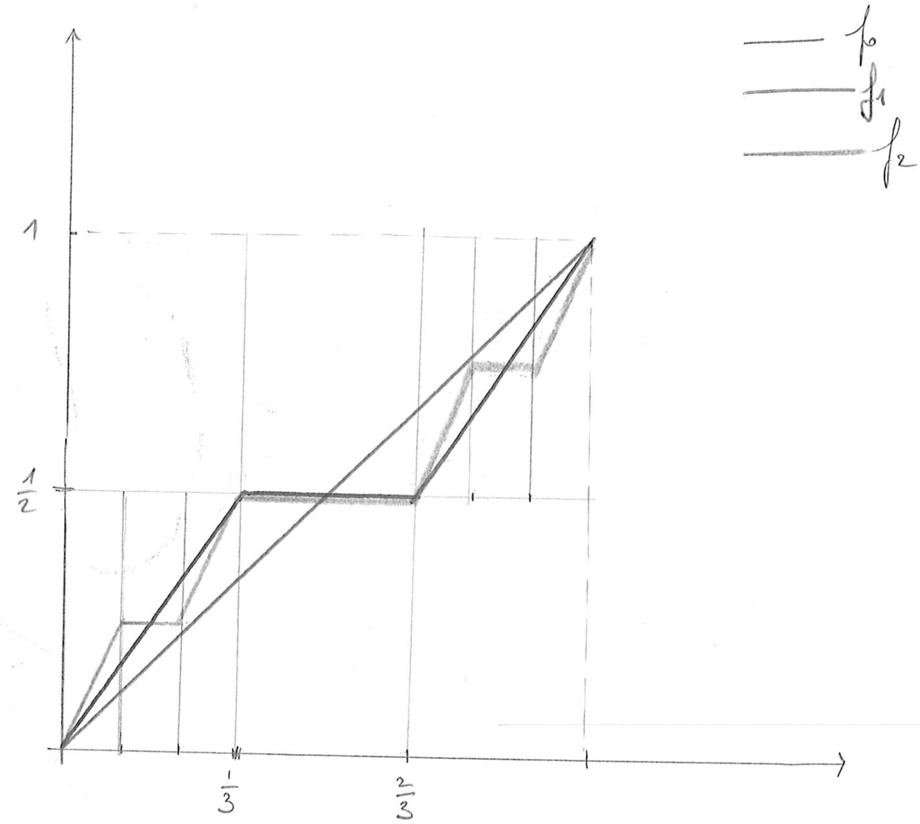
et pour $x=0$ $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) = 1 + \sum_{n=0}^{+\infty} 0 = 1$.

4). $$\int_0^1 \frac{1}{x^x}\,dx = \int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)\right) dx$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^{n+1}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_0^1 u_n(x)\,dx\right)$$

Il s'agit donc simplement d'appliquer le thm d'interversion $\sum / \int$, ce qu'on peut faire car $\forall n \in \mathbb{N}$, u_n est C^0 sur $[0,1]$, et $\left(\sum u_n\right)$ CVN donc CVU sur $[0,1]$.

Exercice 12



Comment obtient-on cette figure ? « $f_{n+1}(x) = \frac{1}{2} f_n(3x)$ sur $[0, \frac{1}{3}]$ » signifie que pour obtenir le graphe de f_{n+1} sur $[0, \frac{1}{3}]$, je prends le graphe de f_n (sur $[0,1]$) et je lui fais subir la transformation linéaire du plan $(x,y) \longmapsto (\frac{1}{3}x, \frac{1}{2}y)$ (à méditer !)
$\underset{\mathbb{R}^2}{\cap}$

De la même façon, « $f_{n+1}(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} f_n(3x-2)$ » sur $[\frac{2}{3}, 1]$ » signifie que le graphe de f_{n+1} sur $[\frac{2}{3}, 1]$ est obtenu en prenant le graphe de f_n sur $[0,1]$ ($x \in [\frac{2}{3}, 1] \Leftrightarrow 3x-2 \in [0,1]$) et en lui faisant subir la transformation affine $(x,y) \longmapsto \left(\frac{1}{3}(x+2), \frac{1}{2} + \frac{1}{2}y\right)$.

homothétie de centre 1 et de rapport $\frac{1}{3}$, inverse de $x \mapsto 3x-2$, homothétie de centre 1 et rapport 3

Justifions cette partie : si $x' \in [\frac{2}{3}, 1]$, $(x',y') \in \text{Graphe}(f_{n+1}) \Leftrightarrow y' = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} f_n(3x'-2)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y' = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} f_n(x) \\ \text{avec } x = 3x'-2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y' = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} y \quad \text{où } y = f_n(x) \text{ et} \\ x' = \frac{1}{3}(x+2) \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$ (x',y') est l'image par l'application susmentionnée du pt $(x, f_n(x))$ du graphe de f_n ac $x = 3x'-2$.

2. Il faudrait déjà vérifier que $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n est bien défini ! (ce qu'on aurait dû faire dès le début). En effet, à n fixé, f_n étant supposé défini, on a pour f_{n+1} une double définition aux points $\frac{1}{3}$ et $\frac{2}{3}$

$$f_{n+1}\left(\tfrac{1}{3}\right) = \tfrac{1}{2} f_n(1) \text{ et } f_{n+1}\left(\tfrac{1}{3}\right) = \tfrac{1}{2} \quad (*)$$

$$f_{n+1}\left(\tfrac{2}{3}\right) = \tfrac{1}{2} \text{ et } f_{n+1}\left(\tfrac{2}{3}\right) = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} f_n(0)$$

Montrons donc par récurrence sur n que $\forall m \in \mathbb{N}$, f_n est bien définie et $f_n(0) = 0$, $f_n(1) = 1$

Initialisation $m=0$: f_0 est bien définie et $f_0(0) = 0$ et $f_0(1) = 1$

Hérédité Soit $m \in \mathbb{N}$. Supposons la propriété vraie au rang m.

Alors f_{n+1} est bien définie sur $[0,1] \setminus \{\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\}$, et en remplaçant $f_n(0)$ par 0 et $f_n(1)$ par 1 dans $(*)$ on voit que $f_n(\frac{1}{3})$ et $f_n(\frac{2}{3})$ sont bien définis.

Enfin, $f_{n+1}(0) = \frac{1}{2} f_n(0) = 0$ et $f_{n+1}(1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} f_n(1) = 1$

donc la propriété est vraie au rang $m+1$, ce qui achève la récurrence. $\square$

On démontre maintenant que $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n est continue et croissante par récurrence sur $m \in \mathbb{N}$.

Initialisation $m=0$ f_0 est bien C^0 (affine) et croissante sur $[0,1]$.

Hérédité Soit $m \in \mathbb{N}$. Supposons f_n C^0 et $\nearrow$ sur $[0,1]$.

Alors par composition, f_{n+1} est C^0 et $\nearrow$ sur $[0, \frac{1}{3}]$ et $[\frac{2}{3}, 1]$, et elle est constante donc C^0 et $\nearrow$ sur $[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$.

f_{n+1} est donc C^0 sur $[0,1] \setminus \{\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\}$, et C^0 à gauche et à droite en $\frac{1}{3}$ et $\frac{2}{3}$, donc C^0 sur $[0,1]$.

Vérifions proprement qu'elle est croissante. Soient $x \leq y \in [0,1]$.

Si x et y appartiennent à un même intervalle $[0, \frac{1}{3}]$ ou $[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$ ou $[\frac{2}{3}, 1]$, f_{n+1} étant croissante sur chacun de ces intervalles, $f_{n+1}(x) \leq f_{n+1}(y)$.

Si maintenant $x \in [\frac{k}{3}, \frac{k+1}{3}]$ et $y \in [\frac{j}{3}, \frac{j+1}{3}]$ avec $k < j$ (de sorte que $\frac{k+1}{3} \leq \frac{j}{3}$)

$$f_{n+1}(x) \leq f_{n+1}\left(\frac{k+1}{3}\right) \leq f_{n+1}\left(\frac{j}{3}\right) \leq f_{n+1}(y)$$, ce qui conclut.

3. Notons déjà que $\forall m \geq 1$, $f_n(x) = \frac{1}{2}$ sur $[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$

Soit $m \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0,1]$. Si $x \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$, $|f_{n+1}(x) - f_n(x)| = 0$

Si $x \in [0, \frac{1}{3}]$, $|f_{n+1}(x) - f_n(x)| = |\frac{1}{2} f_n(3x) - \frac{1}{2} f_{n-1}(3x)| = \frac{1}{2} |(f_n - f_{n-1})(3x)|$

$\leq \frac{1}{2} \|f_n - f_{n-1}\|_{\infty, [0,1]}$

(bien défini car $f_n - f_{n-1}$ est C^0 donc bornée sur le segment $[0,1]$)

De la même façon, si $x \in [\frac{2}{3}, 1]$,

$|f_{n+1}(x) - f_n(x)| = |\frac{1}{2} + \frac{1}{2} f_n(3x-2) - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} f_{n-1}(3x-2)| = \frac{1}{2} |(f_n - f_{n-1})(3x-2)|$

$\leq \frac{1}{2} \|f_n - f_{n-1}\|_{\infty, [0,1]}$

On a donc montré que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\underbrace{\|f_{n+1} - f_n\|_{\infty, [0,1]}}_{u_{n+1}} \leq \frac{1}{2} \underbrace{\|f_n - f_{n-1}\|_{\infty, [0,1]}}_{u_n}$

Par une récurrence immédiate, $\|u_m\|_{\infty, [0,1]} \leq \underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^{m-1} \|u_1\|_{\infty, [0,1]}}$

(u_0 n'est pas défini)

TG d'une série géométrique $(\sum_n C.\alpha^n)$ avec $|\alpha| < 1$, donc convergente

Par comparaison de séries à TG ≥ 0, $(\sum \|u_n\|_{\infty, [0,1]})$ converge, ie $(\sum_n u_n)$ CVN sur $[0,1]$.

4. A fortiori, $(\sum_n u_n)$ cvu sur $[0,1]$, ie la suite de fonctions $(S_m = \sum_{k=1}^{m} u_k)_{m \in \mathbb{N}^*}$ CVU sur $[0,1]$. Or $\forall m \in \mathbb{N}^*$, $S_m = \sum_{k=1}^{m} f_k - f_{k-1} \underset{\uparrow}{=} f_n + f_0$

somme télescopique

donc $f_n = S_m + f_0$, donc $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge elle aussi uniformément vers une fonction que l'on note f. Chaque f_n étant continue, f l'est aussi par thm de continuité (grâce à la CVU), et chaque f_n étant $\nearrow$, f l'est aussi (là, pas besoin de CVU, la CVS suffit, cf feuille 2)

<u>Remarque culturelle</u> La fonction f ainsi construite est continue, croissante, <u>dérivable presque partout</u>, <u>de dérivée presque partout nulle</u>, ce qui ne l'empêche pas de croître de 0 (en 0) à 1 (en 1), montrant que le thm des accroissements finis ne marche pas avec des "presque partout".

Exercice 13 1. $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, |u_n(x)| = |a^n \sin(b^n x)| = a^n \underbrace{|\sin(b^n x)|}_{\leq 1} \leq a^n$ indep^t de x et TG d'une série géom. convergente $(|a|<1)$

donc $(\sum u_n)$ CVN sur $\mathbb{R}$

2. • $\forall n \in \mathbb{N}$, u_n est continue par composition (C^∞ en fait)
• $(\sum u_n)$ CVN donc CVU sur $\mathbb{R}$

donc par thm de continuité, $f = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est C^0 sur $\mathbb{R}$.

3. $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, |u_n'(x)| = |a^n b^n \cos(b^n x)| \leq (ab)^n$ indépendant de x et TG d'une série geom convergente $(0<ab<1)$
(on a déjà dit que u_n était C^1)

donc $(\sum_n u_n')$ CVN (donc CVU) sur $\mathbb{R}$
Comme en outre $(\sum_n u_n)$ CVN donc CVS sur $\mathbb{R}$, les 3 hyp du thm de dérivation terme à terme sont satisfaires, donc $f = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est C^1 sur $\mathbb{R}$.

4. Soit $x \in \mathbb{R}$. $a f(bx) + \sin(x) = a \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(bx) + \sin(x)$

$$= a \sum_{n=0}^{+\infty} a^n \sin(b^n \times bx) + \sin x$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} a^{n+1} \sin(b^{n+1} x) + a^0 \sin(b^0 x)$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} a^k \sin(b^k x) = f(x)$$

comme $b \times 0 = 0$

5. Supposons que f soit dérivable en 0. Alors par composition $x \mapsto f(bx)$ est aussi dérivable en 0, et la relation de la question précédente donne

$$f'(0) = \underbrace{a \times b}_{1} f'(0) + \sin'(0) = f'(0) + 1,$$

ce qui est impossible. f n'est donc pas dérivable en $\underline{\underline{0}}$.

De plus f est 2π périodique. En effet, $\forall n \in \mathbb{N}$, u_n est 2π pér. (car $b^n \in \mathbb{N}$ et sin est 2π p.)

Donc $\forall x \in \mathbb{R}, f(x+2\pi) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x+2\pi) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) = f(x)$, ie f est 2π périodique.

donc f n'est pas dérivable en $\underline{\underline{0}} + 2\pi k$ $\forall k \in \mathbb{Z}$.

k étant fixé, on montre alors par récurrence sur $m \in \mathbb{N}$ que f n'est pas dérivable en $2kb^m\pi$.
C'est vrai pour $m=0$ et si c'est vrai pour un m fixé qcq, en posant $y = 2kb^m\pi$,
la relation de 4 montre que $x \mapsto f(bx)$ n'est pas dérivable en y (sinon par sommation $x \mapsto f(x)$ le serait) ie précisément que f n'est pas dérivable en $by = 2kb^{m+1}\pi$
ce qui conclut.

On procède de même pour $n \in \mathbb{Z}^-$ et on obtient bien que f n'est dérivable en aucun point de $A = \{ 2k b^n \pi \ , (k,n) \in \mathbb{Z}^2 \}$.

Or cet ensemble est <u>dense</u> dans $\mathbb{R}$.

En effet, entre deux points distincts $x < y$ de $\mathbb{R}$, on peut trouver un point de A : notons $\varepsilon = y - x$ et fixons $n_0 \in \mathbb{N}$ tq $0 < \underbrace{2\pi b^{n_0}}_{\alpha} < \varepsilon$

A contient tous les multiples entiers de α, et 2 multiples successifs sont éloignés de moins de ε, donc $]x,y[$ contient l'un de ces multiples, donc un él^t de A.

On a donc construit une fonction continue qui est non dérivable en un ensemble dense de points de $\mathbb{R}$.

En fait c'est bien pire, cette fonction (due à Weierstrass) n'est dérivable <u>nulle part</u> !