Examen Final

Documents, calculatrices, dispositifs electroniques et téléphones portables sont interdits.
La clarté de la rédaction sera prise en compte dans l'évaluation.
Les exercices sont indépendants. Durée de l'épreuve : 2 heures

Exercice 1 : Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0, +\infty[$ on pose $f_n(x) = \dfrac{1}{n(1+nx)}$.

1. Étudier la convergence simple de $\sum f_n$ sur $[0, +\infty[$.

Pour tout $x \in]0, +\infty[$, on pose $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$.

2. Soit $\varepsilon > 0$ fixé, et soit h la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $h(x) = 1/x$.

(i) Montrer que h est bornée sur $]\varepsilon, +\infty[$.

(ii) Est-ce que $\sum f_n$ converge normalement sur $]\varepsilon, +\infty[$?

(iii) Est-ce que f est une fonction continue sur $]\varepsilon, +\infty[$?

3. Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses (justifier soigneusement chaque réponse) ?

(i) h est bornée sur $]0, +\infty[$.

(ii) $\sum f_n$ converge normalement sur $]0, +\infty[$.

(iii) $\sum f_n$ converge uniformément sur $]0, +\infty[$.

(iv) f est continue sur $]0, +\infty[$.

Exercice 2 : Calculer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

$$\sum n^n z^n, \quad \sum \ln(n) z^n, \quad \sum \frac{z^{3n}}{8^n}.$$

Exercice 3 : Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose $g_n(x) = \dfrac{x^{2n+1}}{n(2n+1)}$.

1. Calculer le rayon de convergence (noté R) de la série entière $\sum g_n$.

Pour tout $x \in]-R, +R[$, on pose $g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} g_n(x)$.

2. Montrer que g est de classe C^2 sur $]-1, 1[$. Pour tout $x \in]-1, 1[$, calculer $g''(x)$ (donner une expression en termes de fonctions usuelles, sans symbole “somme”).

3. Calculer explicitement $g(x)$ pour tout $x \in]-1, 1[$. Pour cela, on pourra se souvenir que $1 - x^2 = (1-x)(1+x)$, et que si u est une fonction dérivable strictement positive, $u' \ln(u)$ admet $u \ln(u) - u$ pour primitive.

4. Est-ce que $\sum g_n$ converge normalement sur $[-1, 1]$? On justifiera soigneusement la réponse.

5. En déduire la valeur de $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n(2n+1)}$. On justifiera soigneusement la réponse.

Exercice 4 : On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ et 2π-périodique telle que $f(x) = (x-\pi)^2$ pour $x \in [0, 2\pi[$.

1. Représenter le graphe de g sur $[-3\pi, +3\pi]$. On admettra, au vu de ce graphe, que f est paire.

2. Calculer les coefficients de Fourier $a_n(f)$ et $b_n(f)$.

3. En indiquant les théorèmes utilisés et les hypothèses qu'ils exigent pour leur application, en déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$, de $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, et de $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^4}$.

Université Grenoble Alpes
MAT 242

Licence Sciences et Technologies
Année 2015-2016

Partial examination – April 13, 2016

Documents, calculators and cellphones forbidden.
The quality of writing and explanations will be taken into account.
The exercises are independant from one another. Duration : 2 hours