Université Grenoble Alpes — Licence Sciences et Technologies
MAT402 — 2016-2017

Contrôle continu 2

10 avril 2017 ; durée : 1 heure 30

Documents, calculatrices et téléphones interdits.
Il sera particulièrement tenu compte du soin apporté à la rédaction.
Barème approximatif : Ex. 1 : 5 pts, Ex 2 : 4 pts, Ex 3 : 11 pts

Exercice 1. Calculer les rayons de convergence des séries entières suivantes.

$$\text{a)} \quad \sum_{n\geq 0}(n^2+1)z^n \qquad \text{b)} \quad \sum_{n\geq 0}\frac{n!}{n^n}z^n \qquad \text{c)} \quad \sum_{n\geq 0}\left(\frac{z}{3}\right)^{2n}$$

Exercice 2. On considère la série entière $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{n^2+n+1}{n}z^n$.

(1) Calculer son rayon de convergence R.

(2) Pour tout $x\in]-R,R[$, calculer la somme $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+n+1}{n}x^n$.

Exercice 3.
On rappelle que la fonction arctan est la fonction réciproque de tan : $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\longrightarrow\mathbb{R}$.

Pour tout $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$, on pose $\phi(x)=\dfrac{\arctan(x)}{x}$.

(1) Montrer que $\phi(x)$ tend vers 1 lorsque x tend vers 0.
Ainsi, ϕ se prolonge en une fonction continue (encore notée ϕ) sur $\mathbb{R}$.

(2) Montrer que la fonction $x\mapsto\dfrac{1}{1+x^2}$ est développable en série entière en 0.
Calculer le rayon de convergence de la série entière ainsi obtenue.

(3) En déduire un développement en série entière de ϕ sur $]-1,1[$.

(4) Montrer que la série entière $\displaystyle\sum_{n\geq 0}(-1)^n\frac{x^{2n}}{2n+1}$ converge uniformément sur $[-1,1]$.

(5) En déduire une expression de l'intégrale $I=\displaystyle\int_0^1\frac{\arctan(x)}{x}\,\mathrm{d}x$ comme somme d'une série numérique.

(6) La série entière définissant ϕ converge-t-elle normalement sur $[-1,1]$?

Université Grenoble Alpes — Licence Sciences et Technologies
MAT402 — 2016-2017

Class Test 2

10/4/2017; duration: 1 hour and half

All documents, calculators and cellphones are forbidden.
The clarity of writing and explanations will be taken into account.
Marking scheme: Ex. 1 : 5 pts, Ex 2 : 4 pts, Ex 3 : 11 pts

Exercise 1. Compute the convergence radius of each of the following power series.

$$\text{a)} \quad \sum_{n\geq 0}(n^2+1)z^n \qquad \text{b)} \quad \sum_{n\geq 0}\frac{n!}{n^n}z^n \qquad \text{c)} \quad \sum_{n\geq 0}\left(\frac{z}{3}\right)^{2n}$$

Exercise 2. We consider the power series $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{n^2+n+1}{n}z^n$.

(1) Compute its convergence radius R.
(2) For all $x \in]-R,R[$, compute the sum $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+n+1}{n}x^n$.

Exercise 3.
Reminder: arctan is the inverse function of tan : $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\longrightarrow \mathbb{R}$.
For all $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, we define $\phi(x) = \dfrac{\arctan(x)}{x}$.

(1) Prove that $\phi(x)$ tends to 1 when x tends to 0.

In view of question (1), we extend, ϕ as a continuous function on $\mathbb{R}$ (which we still denote by ϕ).

(2) Prove that the function $x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$ has a power series extension around 0. Compute the convergence radius of the series you have obtained.
(3) Deduce from (2) a power series extension of ϕ on $]-1,1[$.
(4) Show that the power series $\displaystyle\sum_{n\geq 0}(-1)^n\frac{x^{2n}}{2n+1}$ converges uniformly on $[-1,1]$.
(5) Express the integral $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{\arctan(x)}{x}\,\mathrm{d}x$ as the sum of a series of numbers.
(6) Is the series defining ϕ normally converging on $[-1,1]$?