MAT 303 feuille 6

Exo 1 1). $\mathcal{N}_{\|.\|}(A)$ est bien définie pour tt $A \in M_n(\mathbb{R})$ car $\begin{array}{c}\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \\ x \mapsto Ax\end{array}$ est une appli linéaire continue (automatique en dim finie) donc par composition $x \mapsto \|Ax\|$ est aussi continue et S est compact (fs dim finie) donc cette application est bornée sur S et y atteint ses bornes; en particulier $\max\limits_{x\in S}\|Ax\|$ existe, $\in \mathbb{R}_+$.

(séparation) • $\mathcal{N}_{\|.\|}(A)=0 \Rightarrow \forall x\in S,\ \|Ax\|\le 0$, dc $\|Ax\|=0$, dc $Ax=0$ (séparation pour $\|.\|$)

Mais alors $\forall y \in \mathbb{R}^n\setminus\{0\}$, $\frac{y}{\|y\|}\in S$ dc $A\left(\frac{y}{\|y\|}\right)=0$ dc $\frac{1}{\|y\|}Ay=0$

donc $Ay=0$. Donc A est la matrice nulle !

(homogénéité).
$$\mathcal{N}_{\|.\|}(\lambda A) = \max_{x\in S}\|(\lambda A)x\| = \max_{x\in S}\|\lambda(Ax)\| = \max_{x\in S}|\lambda|\,\|Ax\| \quad (\text{homogénéité de } \|.\|)$$
$$= |\lambda| \max_{x\in S}\|Ax\|$$
$$= |\lambda|\,\mathcal{N}_{\|.\|}(A)$$

(inégalité Δ) •
$$\forall x\in S,\ \|(A+B)x\| = \|Ax+Bx\| \underset{\le\Delta \text{ pour } \|.\|}{\le} \|Ax\|+\|Bx\| \le \underbrace{\max_{y\in S}\|Ay\| + \max_{z\in S}\|Bz\|}_{\substack{= \mathcal{N}_{\|.\|}(A) + \mathcal{N}_{\|.\|}(B) \\ (*)}}$$

Donc $\mathcal{N}_{\|.\|}(A+B) = \max\limits_{x\in S}\|(A+B)x\| \le (*)$

2)
$$\forall x\in S,\ \|(AB)x\| = \|A.\underbrace{(Bx)}_{\|Bx\|\times\frac{Bx}{\|Bx\|}}\| = \underbrace{\|Bx\|}_{\le \mathcal{N}_{\|.\|}(B)}.\underbrace{\Big\|A\overbrace{\tfrac{Bx}{\|Bx\|}}^{\in S}\Big\|}_{\le \mathcal{N}_{\|.\|}(A)}$$

Donc $\mathcal{N}_{\|.\|}(AB) \le \mathcal{N}_{\|.\|}(A).\mathcal{N}_{\|.\|}(B)$

3)
$$\|\underbrace{\begin{pmatrix}1 & \cdots & 1\\ \vdots & & \vdots\\ 1 & \cdots & 1\end{pmatrix}}_{A}\|_\infty = 1 \qquad \|A^2 = \begin{pmatrix}n & \cdots & n\\ \vdots & & \vdots\\ n & \cdots & n\end{pmatrix}\|_\infty = n \not\le \|A\|_\infty \times \|A\|_\infty$$

Donc d'après 2, $\|\ \|_\infty$ n'est pas une norme subordonnée.

4) Soit $x \in S_{\|\cdot\|_\infty}$ (ie tq $\max |x_i| \leq 1$)

$$\|Ax\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq m} |(Ax)_i| = \max_{1\leq i \leq m} \underbrace{\left|\sum_{j=1}^m a_{ij} x_j\right|}_{\leq \sum_{j=1}^m |a_{ij}|} \leq \underbrace{\max_{1\leq i\leq m} \sum_{j=1}^m |a_{ij}|}_{(*)}$$

et cette valeur est atteinte : si i_0 est tq $\sum_{j=1}^m |a_{i_0 j}| = \max_i \sum_{j=1}^m |a_{ij}|$

on prend $x_j = \text{signe}(a_{i_0 j})$ $(\in \pm 1)$

ça donne bien un vecteur de $S_{\|\cdot\|_\infty}$ pour lequel $\|Ax\|_\infty = (*)$.

Finalement, $\forall A \in M_n(\mathbb{R})$, $N_{\|\cdot\|_\infty}(A) = \max_{1\leq i\leq m} \sum_{j=1}^m |a_{ij}|$

$$= \|(\underset{\substack{\uparrow \\ \text{ligne } 1}}{\|L_1\|_1}, \ldots, \|L_m\|_1)\|_\infty$$

ligne 1 ...

Exercice 2 1) C'est un sous-espace vectoriel réel de l'ens des fct° de $[a, 1]$ ds $\mathbb{R}$

↳ $\tilde{0}_E \in E$

↳ $\forall f, g \in E$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda f + g$ est toujours continue.

C'est ça qu'il faut montrer (avec des ε et η) ou admettre (cours).

2) Il s'agit de vérifier que cette famille est libre

Supposons qu'il existe $k_1 \ldots k_m \in \mathbb{N}$ distincts et $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ tq

$\sum_{i=1}^m \lambda_i f_{k_i}$ soit la fct° nulle où $f_k : x \mapsto x^k$

↓

fonction polynomiale, ac une coté de racine → polynôme nul

Sinon dérive k_m fois → cste nulle — $\boxed{\text{ts les } \lambda_i \text{ sont nuls.}}$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \overset{\shortparallel}{\max(k_i)}$

E contient donc une famille infinie libre, donc E est de dim infinie.

3) (a) bien déf car C^0 sur compact ⇒ borné et atteint ses bornes

séparat°, homogénéité, inégalité Δ : comme dans l'exo précédent.

VI 2

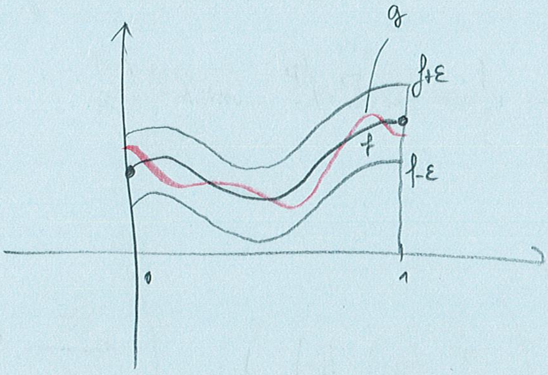
(b) boule unité ouverte : fct° dt le max (en valeur abs ?) de la Nabs est < 1, donc à valeurs dans $]-1,1[$

sphère unité : fonction dt le max de la valeur absolue vaut exactement 1.

(c) $g \in B_{\|\,\|_\infty}(f,\varepsilon) \Leftrightarrow \|g-f\|_\infty < \varepsilon$

$\Leftrightarrow \forall x \in [0,1]\ |g(x)-f(x)| < \varepsilon$

$\Leftrightarrow \forall x \in [0,1],\ f(x)-\varepsilon < g(x) < f(x)+\varepsilon.$



(d) $\max_{x\in[0,1]} |f_n(x)-f(x)| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

en particulier, $\forall x \in [0,1]$, $|f_n(x)-f(x)| \to 0$ ie $f_n(x) \to f(x)$

$f_n \to f$ "point par point", mais en plus :

$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N(\varepsilon)$ tq $\forall n \geq N,\ \forall x \in [0,1],\ |f_n(x)-f(x)| \leq \varepsilon$

$\uparrow$ indept de x

c'est pq le "uniforme"

4. Bien déf, positif ✓

séparat° : Si l'int. d'une fct° continue positive est nulle, la fct° est nulle.

homogénéité : lin. de l'$\int$

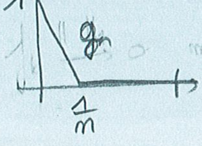
inégalité Δ : croissance de l'intégrale et inégalité Δ sur $\mathbb{R}$.

5. $\forall k,\ \|f_k\|_\infty = 1$; $\|f_k\|_1 = \int_0^1 x^k\,dx = \left[\frac{x^{k+1}}{k+1}\right]_0^1 = \frac{1}{k+1} \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$

Donc on ne peut pas trouver $C>0$ tq $\|\ \|_\infty \leq C \|\ \|_1$

6. $|\varphi(f)| \leq 1 \times \|f\|_\infty$ donc C^0.

$(\varphi : f \mapsto f(0))$



$g_n \xrightarrow{\|\ \|_1} 0$ mais $\underbrace{\varphi(g_n)}_{=1} \not\to \varphi(0) = 0$

Exo 3

1. $\det M = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)}$ polynomiale en les coeff de M donc continue (quelle que soit la norme sur $M_n(\mathbb{R})$, de dim finie)

2. $Gl_n\mathbb{R} = \underbrace{\det^{-1}(\underbrace{\mathbb{R}^*}_{\text{ouvert de } \mathbb{R}})}_{\text{ouvert de } M_n(\mathbb{R}) \text{ car det continue}}$

3. $M_k \in {}^c(Gl_n\mathbb{R})$ $\forall k \in \mathbb{N}$. ${}^c(Gl_n\mathbb{R})$ est fermé, dc $(\lim M_k) \in {}^c(Gl_n\mathbb{R})$, ie pas inversible.

4. $Sl_n\mathbb{R} = \det^{-1}(\underbrace{\{1\}}_{\text{fermé de } \mathbb{R}})$ $\longrightarrow$ fermé de $M_n(\mathbb{R})$ car det C^0.

Exo 4

1. $\varphi : (m_{ij})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le n}} \longmapsto \left(\sum_{k=1}^{n} ({}^tM)_{ik} (M)_{kj} \right)_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le n}} = \left(\sum_{k=1}^{n} m_{k,i} m_{k,j} \right)_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le n}}$

pour i, j fixé le coeff ij de ${}^tMM$ est une fonction polynomiale des coeffs de M, donc la fct° $M \longmapsto ({}^tMM)_{i,j}$ est C^0 $\forall i,j$. Autrement dit, chaq composante de $M \longmapsto {}^tMM$ est continue. Donc cette applicat° est elle-m̂ C^0 (et pour n'importe quelle norme vu qu'elles sont toutes équivalentes!)

2. $O_n(\mathbb{R}) = \varphi^{-1}(\underbrace{\{I_n\}}_{\text{fermé}})$ fermé car φ C^0.

3. Si $M \in O_n$, ${}^tMM = I_n$ ie d'après ci dessus, $\forall i,j$ $\underbrace{\sum_{k=1}^{n} m_{ki} m_{kj}}_{\langle C_i, C_j \rangle} = \delta_{ij}$!!

4. Si $M \in O_n$, ses colonnes satisfont $\|C_i\|_{eucl} = 1$

A fortiori $|m_{ij}| \le 1$ $\forall i j$ donc $\|M\|_\infty \le 1$

$\longrightarrow O_n$ est borné pour $\| \|_\infty$ sur $M_n(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^{n^2}$

5. $O_n(\mathbb{R})$ est fermé borné dans un evn df donc compact.