Feuille 5 : quelques corrections

<u>Exercice 5</u> (fin) On avait vu que f était C^∞ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ (fraction rationnelle), qu'elle admettait des dérivées partielles en tout point :

$$\frac{\partial f}{\partial x} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x,y) \longmapsto \begin{cases} \dfrac{x^4 y + 4x^2y^3 - y^5}{(x^2+y^2)^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x,y) \longmapsto \begin{cases} \dfrac{x^5 - 4x^3y^2 - xy^4}{(x^2+y^2)^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

On sait déjà que les dérivées partielles secondes existent et sont C^0 sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$.
Etudions leur existence en $(0,0)$:

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$ est, si elle existe la dérivée en 0 de la fonction $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ y & \longmapsto & \frac{\partial f}{\partial x}(0,y) \end{array}$

Cette fonction est identiquement nulle (donc dérivable en 0, de dérivée nulle),
donc $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ existe et vaut 0.

Par le même raisonnement, on obtient $\boxed{\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) = 0.}$

Pour étudier le caractère C^2 de f, il nous faut donc maintenant étudier la continuité en $(0,0)$ des 4 fonctions $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ (les 2 centrales coïncident, sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ par le lemme de Schwarz, mais aussi en $(0,0)$ comme on vient de le voir), et donc commencer par les calculer sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$.

Notamment, $\boxed{\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)} = \left[\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)\right](x,y) = \dots = \boxed{4 \cdot \dfrac{3xy^5 - x^3y^3}{(x^2+y^2)^6}}$

(Intuitivement : le numérateur et le dénominateur sont tous deux homogènes de degré 6, en particulier, le num ne va pas être négligeable par rapport au dénominateur au voisinage de $(0,0)$)

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,x) = 4\,\frac{2 \cdot x^6}{(2x^2)^3} = 1 \underset{x\to 0}{\not\longrightarrow} 0$$

A fortiori $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) \underset{(x,y)\to(0,0)}{\not\longrightarrow} 0 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)$

Donc $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ n'est pas continue en $(0,0)$, donc f n'est pas C^2.

Exercice 6 1. La fonction $\begin{array}{ccc}\mathbb{R}\times\mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \frac{x}{y}\end{array}$ est rationnelle donc continue (sur son ensemble de définition $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*$); sin est continue sur $\mathbb{R}$ donc par composition, $\begin{array}{ccc}\mathbb{R}\times\mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \sin\left(\frac{x}{y}\right)\end{array}$ est C^0. Enfin, $(x,y)\longmapsto y^2$ est polynomiale donc continue sur $\mathbb{R}^2$, donc par produit, f est continue sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*$.

Reste à étudier la continuité en les points de $\mathbb{R}^2$ qui ne sont pas dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*$, ie les points $(x_0,0)$, $x_0\in\mathbb{R}$.

Pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ $\quad 0 \leq |f(x,y)| \leq y^2$ (vrai si $y\neq 0$ car alors $f(x,y) = y^2\sin\left(\frac{x}{y}\right)$ et $|\sin|\leq 1$, et immédiat si $y=0$)

Or $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,0)} y^2 = 0$ (la fonction $(x,y)\longmapsto y^2$ est C^0 en $(x_0,0)$ donc sa limite en ce point est sa valeur en ce point)

Donc par encadrement, $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,0)} f(x,y) = 0 = f(x_0,0)$, ie f est continue en $(x_0,0)$.

Finalement, f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

2. Toujours par composition et produit des mêmes fonctions, f est C^∞ sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$.
(voir le calcul des dérivées partielles ci-dessous)
Soit maintenant $x_0 \in \mathbb{R}$.

- $\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x,0) \end{array}$ est constante égale à 0 donc dérivable en x_0, de dérivée 0.

Ainsi, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, 0) = 0$.

- $\forall y \neq 0$, $f(x_0, y) = y^2 \sin\left(\dfrac{x_0}{y}\right)$, donc

$$\frac{f(x_0,y) - f(x_0,0)}{y} = y \sin\left(\frac{x_0}{y}\right) \xrightarrow[y \to 0]{} 0$$

$\left(0 \leq \left|y \sin\left(\frac{x_0}{y}\right)\right| \leq |y| + \text{thm d'encadrement}\right)$

Donc $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, 0)$ existe et vaut 0.

f admet donc des dérivées partielles d'ordre 1 en tout point de $\mathbb{R}^2$.
En $(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$, elles sont calculées par composition :

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)} = y^2 \times \frac{1}{y} \cos\left(\frac{x}{y}\right) \boxed{= y \cos\left(\frac{x}{y}\right)} \quad (1)$$

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)} = y^2 \times \left(-\frac{x}{y^2}\right) \cos\left(\frac{x}{y}\right) + 2y \sin\left(\frac{x}{y}\right) \boxed{= -x\cos\left(\frac{x}{y}\right) + 2y \sin\left(\frac{x}{y}\right)} \quad (2)$$

Dérivées d'ordre 2 : En $(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) \overset{(1)}{=} y \times \frac{1}{y} \times \left(-\sin\left(\frac{x}{y}\right)\right) = -\sin\left(\frac{x}{y}\right)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \overset{(2)}{=} \cancel{+}1 \times \cos\left(\frac{x}{y}\right) - x \times \left(-\frac{1}{y}\sin\left(\frac{x}{y}\right)\right) + 2y \times \frac{1}{y} \times \cos\left(\frac{x}{y}\right)$$

$$= \cos\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{x}{y}\sin\left(\frac{x}{y}\right)$$

(vérif : $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) \overset{(1)}{=} 1 \times \cos\left(\dfrac{x}{y}\right) - y \times \left(-\dfrac{x}{y^2}\right)\sin\left(\dfrac{x}{y}\right) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)$ ouf !)

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = -\frac{x^2}{y^2}\,\cancel{\cos}\,\text{sin}\left(\frac{x}{y}\right) + 2\sin\left(\frac{x}{y}\right) - \frac{2x}{y}\cos\left(\frac{x}{y}\right) = \cancel{-\left(\frac{x}{y}\cos\left(\frac{x}{y}\right)\right)\left(\frac{x}{y}+2\right) + 2\sin\left(\frac{x}{y}\right)}$$

• $\frac{\partial f}{\partial y}(x,0) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ donc $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial y}(x,0)$ est dérivable en tout $x_0 \in \mathbb{R}$, de dérivée nulle, ie

$$\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,0) \text{ existe et vaut } 0.}$$

• Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. • $\begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ y \longmapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y) = \begin{cases} y\cos\left(\frac{x_0}{y}\right) & \text{si } y \neq 0 \\ 0 & \text{si } y = 0 \end{cases} \end{array}$ n'est dérivable en $y=0$

que si $x_0 = 0$. $\left(\frac{y\cos\left(\frac{x_0}{y}\right) - 0}{y - 0} = \cos\left(\frac{x_0}{y}\right) \right.$ qui n'a pas de limite qd $y \to 0$ si $x_0 \neq 0$

Si $x_0 = 0$, la limite existe et vaut 1)

Donc on obtient
$$\left\{ \begin{array}{l} \boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = 1} \\ \boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0,0) \text{ pas définie si } x_0 \neq 0} \end{array} \right.$$

• $\begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ y \longmapsto \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y) = \begin{cases} -x_0\cos\left(\frac{x_0}{y}\right) + 2y\sin\left(\frac{x_0}{y}\right) & \text{si } y \neq 0 \\ 0 & \text{si } y = 0 \end{cases} \end{array}$

est identiquement nulle si $x_0 = 0$ (donc dérivable en $y=0$, de dérivée nulle)

et n'est pas dérivable en $y=0$ si $x_0 \neq 0$: $\frac{-x_0\cos\left(\frac{x_0}{y}\right) + 2y\sin\left(\frac{x_0}{y}\right) - 0}{y - 0}$

$= \underbrace{-\frac{x_0}{y}\cos\left(\frac{x_0}{y}\right)}_{\text{oscille entre } +\infty \text{ et } -\infty \text{ qd } y \to 0} + \underbrace{2\sin\left(\frac{x_0}{y}\right)}_{|\cdot| \leq 1} \longrightarrow$ n'a pas de limite qd $y \to 0$.

Donc on obtient :
$$\left\{ \begin{array}{l} \boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) = 0} \\ \boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,0) \text{ pas définie si } x_0 \neq 0} \end{array} \right.$$

• Enfin $\begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \longmapsto \frac{\partial f}{\partial y}(x,0) = 0 \end{array}$ est dérivable en $x = x_0$ $\forall x_0 \in \mathbb{R}$, de dérivée 0, donc

$$\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,0) = 0 \qquad \forall x_0 \in \mathbb{R}}$$

En particulier f n'est pas C^2 sur $\mathbb{R}^2$ puisque ses dérivées d'ordre 2 ne sont pas définies partout. Le plus grand ouvert sur lequel elle est C^2 est $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*$.

Est-elle C^1 ? On a vu que ses dérivées partielles d'ordre 1 étaient C^0 sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*$.

Etudions leur continuité en $(x_0,0)$, pour $x_0\in\mathbb{R}$.

- La continuité de $\frac{\partial f}{\partial x}$ se montre exactement comme celle de f. (sur $\mathbb{R}^2$)

- $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \underbrace{-x\cos\left(\frac{x}{y}\right)}_{} + \underbrace{2y\sin\left(\frac{x}{y}\right)}_{\xrightarrow[(x,y)\to(x_0,0)]{} 0}$ pour $(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*$ (même preuve que pour f)

  $-x\cos\left(\frac{x}{y}\right)$: n'a pas de limite qd $y\to 0$ si $x_0\neq 0$

  En revanche, $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$, $0\leq\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right|\leq |x|+|y|$ (par inégalité triangulaire pour $y\neq 0$, immédiat si $y=0$)

  Donc $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \underset{\text{par encadrement.}}{=} 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$

Finalement, $\frac{\partial f}{\partial y}$ est C^0 sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*$ et en $(0,0)$ (et nulle par ailleurs)

Conclusion : f n'est pas C^1 sur $\mathbb{R}^2$. Le plus gd ouvert sur lequel elle l'est est $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*$.

Sur $\mathbb{R}^2$, elle n'est que C^0.

Exercice 7 Cas non traités en TD :

- $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$. f est C^∞ sur $\mathbb{R}^2$ car polynomiale.

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\nabla f(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \right) = (3x^2 - 3y, 3y^2 - 3x)$

$(x,y) \in \mathbb{R}^2$ est un point critique de $f \iff \begin{cases} 3x^2 - 3y = 0 \\ 3y^2 - 3x = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 = y \\ y^2 = x \end{cases} \iff \begin{cases} y = x^2 \\ x^4 = x \end{cases}$

$\iff \begin{cases} y = x^2 \\ \underbrace{x(x^3 - 1) = 0}_{\text{a pour solution } x=0 \text{ et } x=1} \end{cases} \iff \left((x,y) = (0,0) \text{ ou } (x,y) = (1,1) \right)$

Les points critiques de f sont donc $(1,1)$ et $(0,0)$

$$\text{Hess}(f)(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{pmatrix}$$

En $(0,0)$ $\text{Hess}(f)(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$, de déterminant $-9 < 0$

$\rightarrow$ $(0,0)$ est un point selle.

En $(1,1)$ $\text{Hess}(f)(1,1) = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$ de déterminant $27 > 0$

Comme en outre $6 > 0$, f admet en $(1,1)$ un minimum local.

Celui-ci n'est pas global car, notamment, $f(x,0) = x^3$ $\forall x \in \mathbb{R}$,

qui tend vers $-\infty$ qd $x \to -\infty$, donc f n'est pas minorée.

- $f(x,y) = xe^y + ye^x$ f est C^∞ par somme et produits de telles fonctions.

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\nabla f(x,y) = (e^y + ye^x, xe^y + e^x)$

$(x,y) \in \mathbb{R}^2$ est un pt critique de $f \iff \nabla f(x,y) = (0,0) \iff \begin{cases} e^y + ye^x = 0 \\ xe^y + e^x = 0 \end{cases}$

$$\cdots \underset{L_2 \leftarrow L_2 - xL_1}{\iff} \begin{cases} e^y + ye^x = 0 \\ \underbrace{e^x}_{\neq 0}(1-xy) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} e^y + ye^x = 0 \\ xy = 1 \end{cases} \iff x, y \neq 0 \text{ et } \begin{cases} y = \frac{1}{x} \\ e^{\frac{1}{x}} + \frac{e^x}{x} = 0 \end{cases}$$

Etant donné $x \neq 0$, $e^{\frac{1}{x}} + \frac{1}{x}e^x = 0 \iff \underbrace{e^x}_{\neq 0}\underbrace{\left(\frac{1}{x} + e^{\frac{1}{x} - x}\right)} = 0$

Cherchons les solutions de cette équation (forcément < 0)

Posons $g(x) = \frac{1}{x} + e^{\frac{1}{x} - x}$ $\forall x \in]-\infty, 0[$

g est dérivable et $g'(x) = \underbrace{-\frac{1}{x^2}}_{<0} + \underbrace{\left(-\frac{1}{x^2} - 1\right)}_{<0}\underbrace{e^{\frac{1}{x} - x}}_{>0} < 0$

En outre, $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x} - x = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = +\infty$

et $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{1}{x} - x = -\infty$ donc $\lim\limits_{x \to 0^-} e^{-x + \frac{1}{x}} = 0$ et $\lim\limits_{x \to 0^-} g(x) = -\infty$

On obtient donc le tableau de variation suivant pour g :

	$-\infty$		0
g'		0	
	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$

g étant C^0, par le TVI, $\exists a \in]-\infty, 0[$ tq $g(a) = 0$ (et un tel a est unique puisque g est strictement décroissante)

Ainsi, f admet pour unique point critique le point $\left(a, \frac{1}{a}\right)$ avec a unique solution de l'équation $\frac{1}{x} + e^{\frac{1}{x} - x} = 0$.

$$\mathrm{Hess}(f)(x,y) = \begin{pmatrix} ye^x & e^y + e^x \\ e^x + e^y & xe^y \end{pmatrix}$$

Donc $\mathrm{Hess}(f)\left(a, \frac{1}{a}\right) = \begin{pmatrix} \frac{e^a}{a} & e^{1/a} + e^a \\ e^{1/a} + e^a & ae^{\frac{1}{a}} \end{pmatrix}$, de déterminant $e^{a + \frac{1}{a}} - \left(e^a + e^{\frac{1}{a}}\right)^2$

$$= e^{a+\frac{1}{a}} - e^{2a} - 2e^{a + 1/a} - e^{\frac{2}{a}}$$

$$= -e^{a + \frac{1}{a}} - e^{2a} - e^{2/a} < 0$$

Donc $\left(a, \frac{1}{a}\right)$ est un point selle.

Exercice 8

1) On fixe $k \in \mathbb{R}$. $g_k(x) = f(x, kx) = (x^2 - kx)(3x^2 - kx)$

$$= \underbrace{x^2}_{\geq 0}(x-k)(3x-k)$$

Si $k=0$, $g_k(x) = 3x^4$, qui admet un min local (et même global) en 0

Si $k>0$, pour x proche de 0, $x-k$ et $3x-k$ sont <0, donc par produit $g_k(x) \geq 0$

De même si $k<0$, ——————————— >0 ———————————

Comme $g_k(0)=0$, ceci montre bien que quel que soit k, g_k admet un minimum local en 0.

2) On peut commencer par appliquer le cours pour étudier le comportement local de f au voisinage de $(0,0)$, mais vue la tournure de la question et de l'exercice en général, on se doute bien que ça ne va mener à rien. Essayons tout de même :

$$\nabla f(x,y) = \left(2x(3x^2-y) + 6x(x^2-y), -(3x^2-y) - (x^2-y)\right)$$

En particulier, sans même condenser, $\nabla f(0,0) = (0,0)$

$\longrightarrow$ $(0,0)$ est un point critique de f

Condensons tout de même pour calculer la Hessienne : $\nabla f(x,y) = (12x^3 - 8xy, -4x^2 + 2y)$

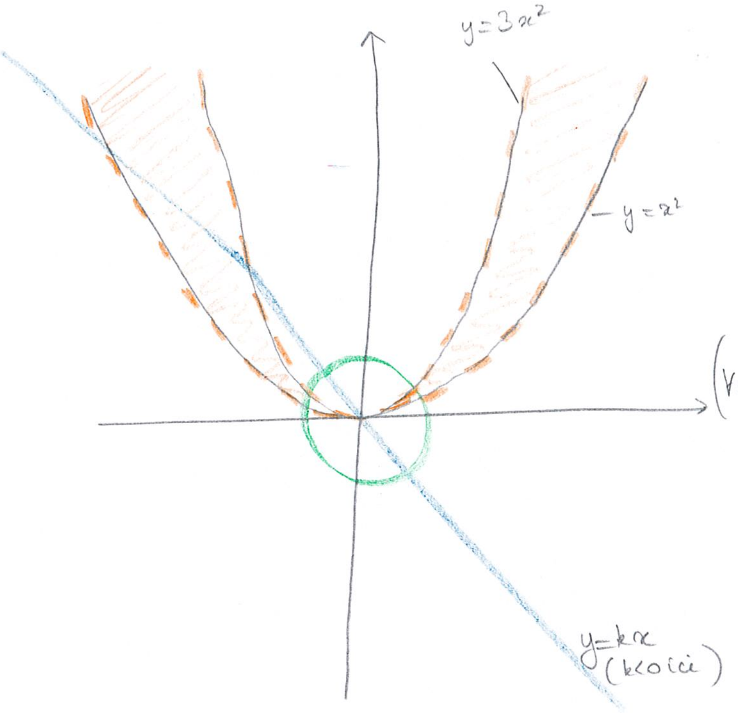
$$\text{Hess}(f)(x,y) = \begin{pmatrix} 36x^2 - 8y & -8x \\ -8x & 2 \end{pmatrix}$$ et en particulier $\text{Hess}(f)(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Autrement dit, le point $(0,0)$ est un point critique dégénéré et sa Hessienne ne nous dit rien sur sa nature (extremum ?).

Revenons donc à l'expression de f, et rendons-nous compte qu'on peut étudier son signe directement ! $f(x,y) < 0 \iff \begin{cases} x^2 < y \text{ et } 3x^2 > y \\ \text{ou} \\ x^2 > y \text{ et } 3x^2 < y \end{cases}$ (ce qui est impossible car $3x^2 \geq x^2$)

$$\iff x^2 < y < 3x^2$$

En particulier, il existe des points (x,y) où f est strictement négative, et ce aussi près qu'on veut de $(0,0)$ (cf dessin) donc $(0,0)$ n'est pas un min local.



$= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2<y<3x^2\}$

L'ensemble ci-dessus intersecte tout voisinage de $(0,0)$

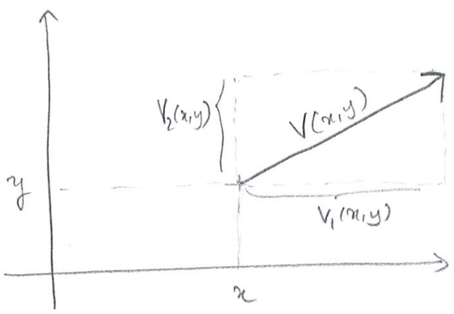
$\left(\forall n\in\mathbb{N}^*, z_n = \left(\underset{x_n}{\frac{1}{n}}, \underset{y_n}{\frac{2}{n^2}}\right)\right.$ $\left(x_n^2 = \frac{1}{n^2} < y_n < \frac{3}{n^2} = 3x_n^2\right)$

appartient à l'ensemble orange et $\left.\lim_{n\to+\infty} z_n = (0,0)\right)$

__Conclusion__ __En restriction__ à toute __droite__ $\Delta_k : y=kx$, f admet en $(0,0)$ un minimum local (questions). En revanche f n'admet pas un minimum local en $(0,0)$. Paradoxal ?

__Non !__ toute droite Δ_k, au voisinage de $(0,0)$, est disjointe de l'ensemble orange ! Quand on étudie les extrema de f sur les droites passant par $(0,0)$, on ne "voit pas" l'ensemble orange.

__Exercice 9__ Préliminaire : comment __dessiner__ un champ de vecteurs ?



En un certain nombre de points du plan, de coordonnées (x,y), dessiner le vecteur $\vec{V}(x,y)$ __issu du point (x,y)__ comme sur le dessin ci-contre.

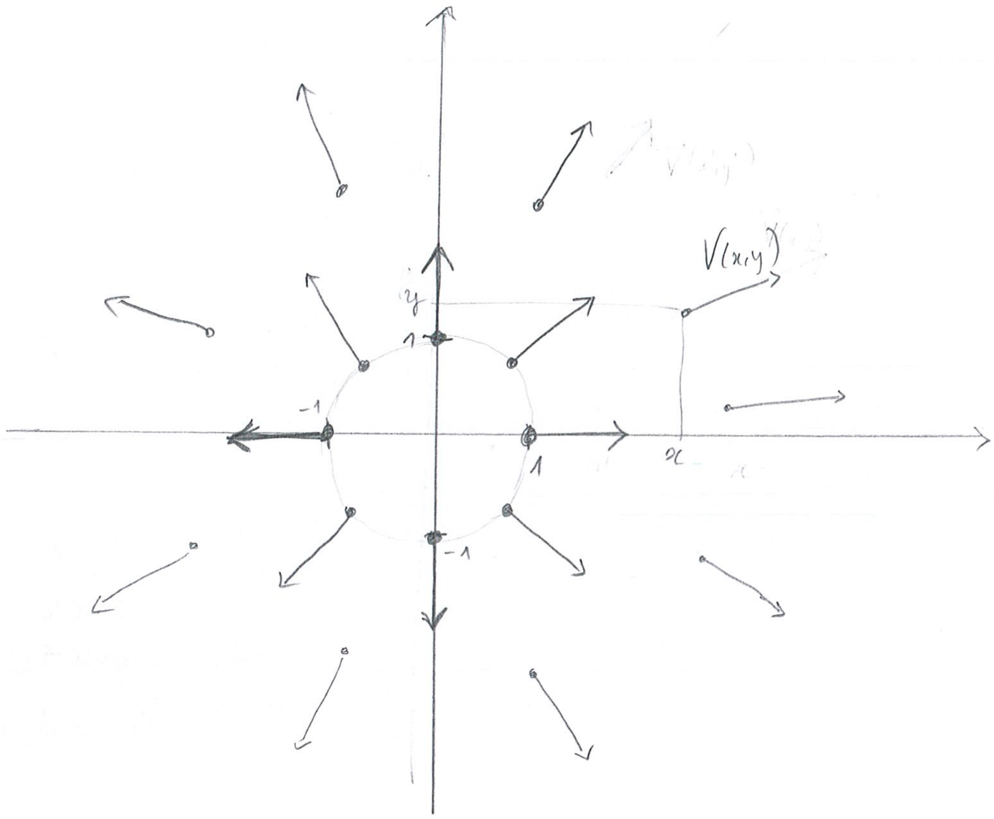
Un __champ de vecteurs__ associe à chaque point du plan (dans cet exercice) un vecteur qu'il faut penser "accroché à ce point". Celui-ci peut représenter un champ électrique, magnétique etc.

Pour les exemples de l'exercice :

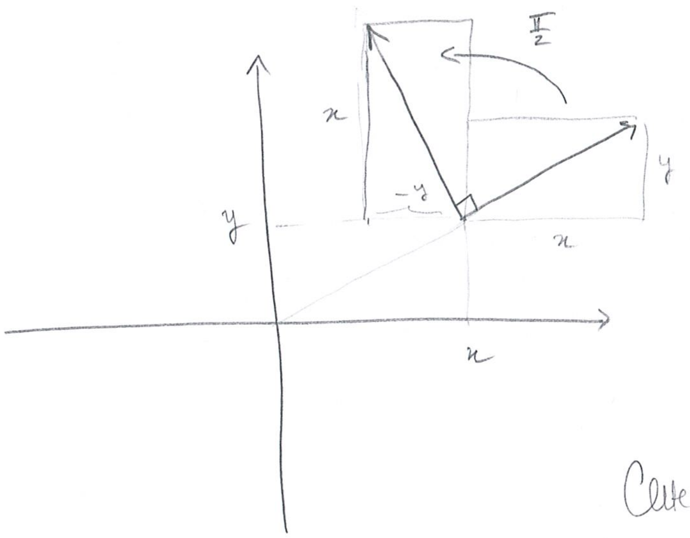
$$V(x,y) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} , \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \right) = \frac{(x,y)}{\|(x,y)\|_2} \quad \left(\text{de sorte que } \begin{cases} V(x,y) \text{ positivement colinéaire à } (x,y) \\ \| V(x,y) \|_2 = 1 \end{cases} \right)$$

C'est le "champ unitaire radial", que l'on note aussi parfois $\vec{e_r}$ en coordonnées polaires : $\vec{e_r}(r\cos\theta, r\sin\theta) = (\cos\theta, \sin\theta)$; $\vec{e_\theta}(r\cos\theta, r\sin\theta) = (-\sin\theta, \cos\theta)$

obtenu à partir de $\vec{e_r}$ par une rotation de $\frac{\pi}{2}$.



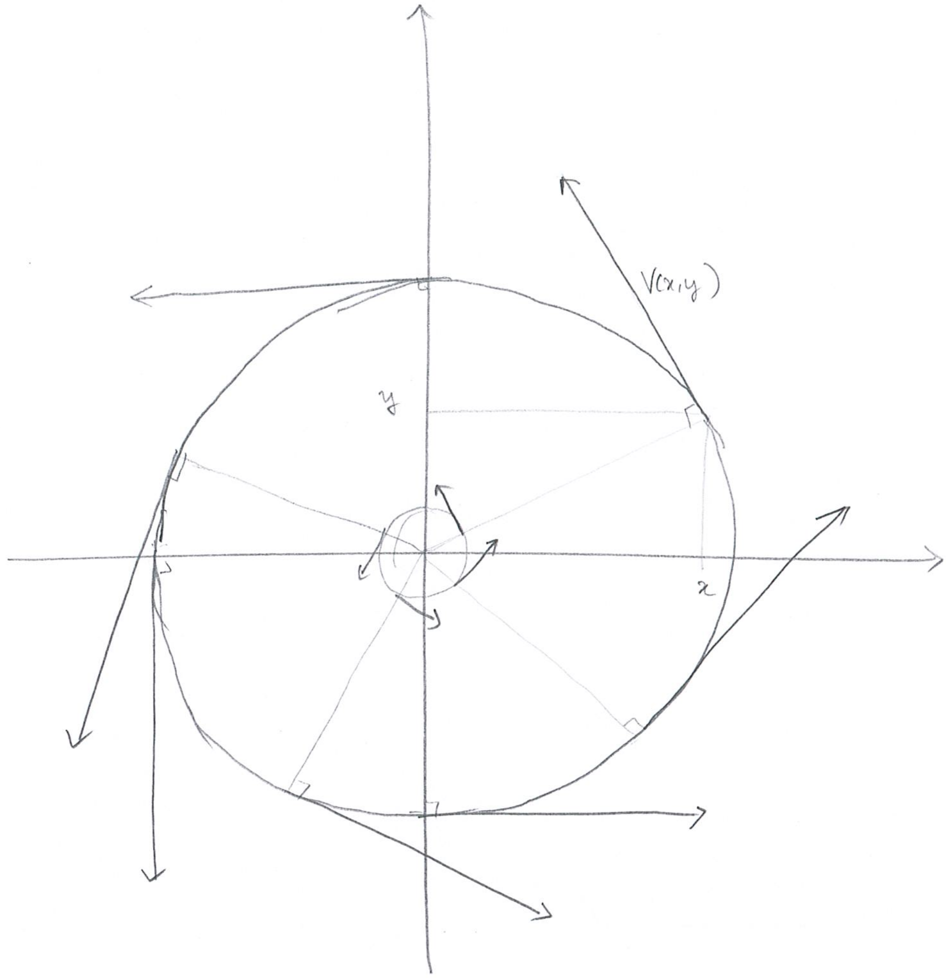
$V(x,y) = (-y, x)$ est le vecteur obtenu à partir de (x,y) par une rotation de $\frac{\pi}{2}$



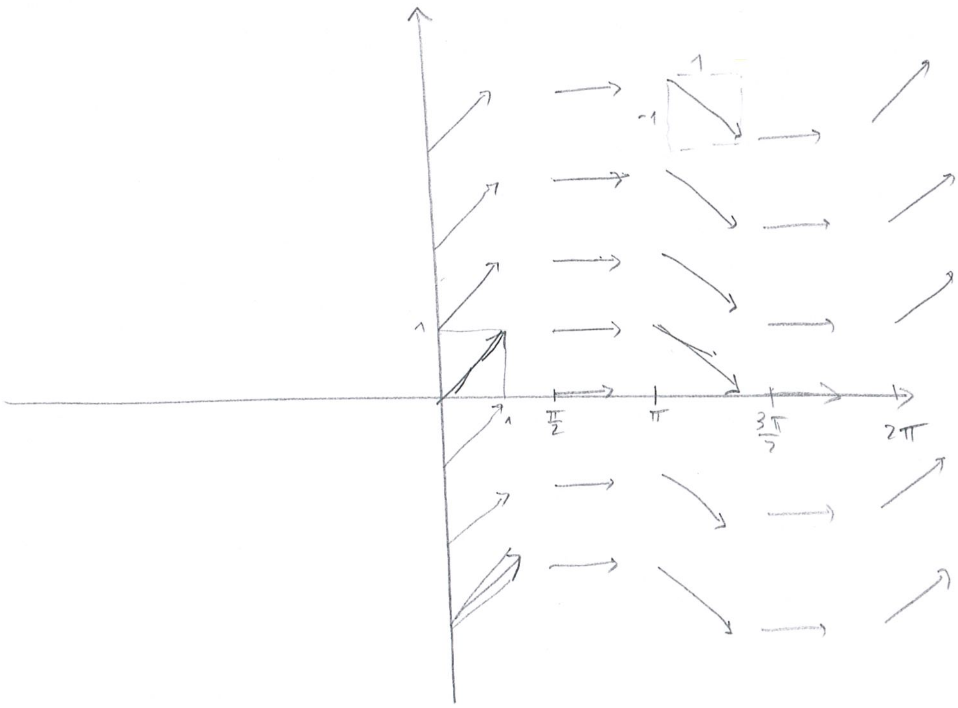
Remarque :

$$V(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} \times \underbrace{\left(\frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}} , \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \right)}_{\substack{\vec{e_\theta}(x,y) \\ \text{(unitaire, obtenu à} \\ \text{partir de } \vec{e_r} \text{ par rotation} \\ \text{de } \frac{\pi}{2})}}$$

Cette fois-ci, V n'est pas unitaire, sa norme croît avec celle de (x,y)



$V(x,y) = (1, \cos x)$



Calculons maintenant la divergence et le rotationnel de ces 3 chps de vecteurs :

1) $V(x,y) = \dfrac{(x,y)}{\|(x,y)\|_2}$. $\quad V_1(x,y) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$; $\dfrac{\partial V_1}{\partial x}(x,y) = \dfrac{1 \times \sqrt{x^2+y^2} - x \times \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2}$

$$= \frac{x^2+y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

$$= \frac{y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

De la même façon, $\dfrac{\partial V_2}{\partial y}(x,y) = \dfrac{x^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}$

Ainsi, $\boxed{\operatorname{div}(V)(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}}$ (>0)

En outre, $V_1(x,y) = x\left(x^2+y^2\right)^{-\frac{1}{2}}$ donc $\dfrac{\partial V_1}{\partial y}(x,y) = x \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 2y \cdot \left(x^2+y^2\right)^{-3/2}$

$$= -xy\left(x^2+y^2\right)^{-3/2}$$

et, de façon similaire, $\dfrac{\partial V_2}{\partial x}(x,y) = -xy\left(x^2+y^2\right)^{-3/2}$

de sorte que $\boxed{\operatorname{Rot}(V) = 0.}$

2) $V(x,y) = (-y, x)$. $\quad \dfrac{\partial V_1}{\partial x}(x,y) = \dfrac{\partial V_2}{\partial y}(x,y) = 0$ donc $\underline{\operatorname{div}(V) \equiv 0}$

$\dfrac{\partial V_1}{\partial y}(x,y) = -1$, $\dfrac{\partial V_2}{\partial x}(x,y) = 1$, donc $\underline{\operatorname{Rot}(V) \equiv 2}$

3) $V(x,y) = (1, \cos x)$; $\quad \dfrac{\partial V_1}{\partial x}(x,y) = \dfrac{\partial V_2}{\partial y}(x,y) = 0$ donc $\underline{\operatorname{div}(V) \equiv 0}$

$\dfrac{\partial V_2}{\partial x}(x,y) = -\sin x$, $\dfrac{\partial V_1}{\partial y} \equiv 0$ donc $\underline{\operatorname{Rot}(V)(x,y) = \sin x}$

<u>Interprétation</u> • <u>La divergence</u> d'un champ de vecteurs en un point (x,y) du plan mesure la façon dont deux objets situés très près de (x,y) à un instant donné et se déplaçant "en suivant les flèches" ont tendance à s'éloigner ou se rapprocher l'un de l'autre, i.e à quel point les trajectoires <u>divergent</u>.

divergence > 0 : les objet s'éloignent (infinitésimalement)

——— < 0 : ——— se rapprochent

——— $= 0$: en moyenne, les objets restent à la même distance

(Plus rigoureusement, la divergence mesure l'évolution infinitésimale de l'aire d'un petit disque centré en (x,y) sous l'action du flot du champ de vecteurs. cf. cours d'équations différentielles en L3)

Dans le cas 1, les flèches ont tendance à s'écarter, ce qui se traduit par une divergence > 0, qui néanmoins décroît quand on s'éloigne de l'origine (plus on va loin, plus les flèches ont l'air parallèles au voisinage d'un point)

Dans le cas 2 les trajectoires tournent autour de l'origine, deux objets voisins se déplaçant en suivant les flèches effectuent une rotation (de même angle) autour de $(0,0)$, donc ne s'éloignent ni ne se rapprochent l'un de l'autre,

$\rightarrow$ div $= 0$

Dans le cas 3, c'est un peu moins clair. Deux objets situés l'un au-dessous de l'autre vont se déplacer parallèlement s'ils suivent les flèches. Deux objets situés côte à côte en revanche... néanmoins "au 1er ordre", les trajectoires, en moyennent, ne s'éloignent ou ne se rapprochent pas.

- l'interprétation du rotationnel est moins évidente, mais disons, en première approx., que le rotationnel d'un chp de vecteurs en un point (x,y) mesure, si l'on place un objet en (x,y) et un objet très près, la façon dont le second va tourner autour du premier s'ils se déplacent tous deux "en suivant les flèches", ou, si l'on préfère, si l'on se place du pt de vu du 1er objet, la façon dont le second va nous tourner autour. Rot > 0 : rotation dans le sens > 0

  < 0 : ——— < 0

  $= 0$: pas de rotation (au 1er ordre)

Dans le cas 1 : pas de rotation

Dans le cas 2 : rotation dans le sens > 0 (c'est clair autour de $(0,0)$, mais moins ailleurs ...)

Dans le cas 3 : ça dépend !

Pour plus d'information et des explications plus rigoureuses, internet est votre ami !