Exercice 3 Question supplémentaire (adhérence, intérieur, frontière)
(Pour chaque question, on note A l'ensemble étudié)

4 a) On a déjà vu que A était fermé donc $\boxed{A = \bar{A}}$

b) Soit $B = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y > x^2\}$. On montre comme dans la question 5 que B est un ouvert. Comme $B\subset A$ et que $\mathring{A}$ est le plus grand ouvert inclus dans A, B est inclus dans $\mathring{A}$. Reste à montrer que $\mathring{A}\subset B$, ie que les points de A qui ne sont pas dans B ne sont pas intérieurs à A. Il s'agit des $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ tq $y=x^2$. Et en effet, pour tout tel point, $\forall r>0$ $B((x,y),r)\not\subset A$ puisque $(x+\frac{r}{2}, y)$ appartient à cette boule mais pas à A. Donc un tel point n'est pas intérieur à A.

Finalement $\boxed{\mathring{A} = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y > x^2\}}$

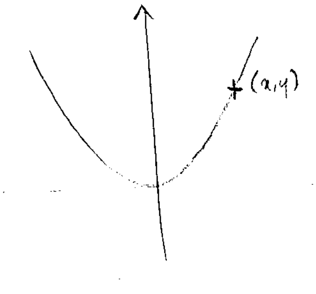
c) $\boxed{\partial A = \bar{A}\setminus\mathring{A} = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y = x^2\}}$

5. a) On a déjà vu que A était ouvert donc $\boxed{\mathring{A}=A}$

b) Vérifions que $\bar{A} = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0\le y\le x^2\}$. Notons pour l'instant B cet ensemble.

Cet ensemble est fermé (même preuve que pour 4 - fermé) et contient A.
Or $\bar A$ est le plus petit fermé contenant A, donc $\bar{A}\subset B$. Pour montrer que $B\subset\bar{A}$, il s'agit de vérifier que tout élément de $B\setminus A$ est limite d'une suite d'éléments de A. Soit $(x,y)\in B\setminus A$. Soit $y=0$, soit $y=x^2$. Dans le premier cas $\left(\left(x+\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ si $x\geq 0$, $\left(\left(x-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ si $x<0$ converge vers $(x,y)=(x,0)$ et est à valeurs dans A. Donc $(x,y)\in\bar{A}$.

Dans le second cas $(y=x^2)$ (cf dessin), opsq $(x,y)\neq(0,0)$ (traité dans le premier cas) donc $y>0$.



Alors $\left(\left(x+\frac{1}{n}, y\right)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ si $x>0$, $\left(\left(x-\frac{1}{n}, y\right)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ si $x<0$ est à valeurs dans A et converge vers (x,y), donc $(x,y)\in\bar{A}$. Finalement, $\boxed{\bar{A} = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0\le y\le x^2\}}$

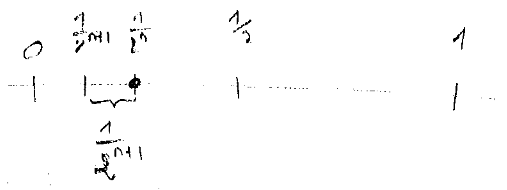
c) $\partial A = \overline{A} \setminus \mathring{A} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y=0 \text{ ou } y = x^2\}$ (réunion de l'axe des abscisses et d'une parabole)

6) a. Par le même type d'arguments que précédemment, on remarque que

$$\boxed{\begin{aligned} \mathring{A} &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -2 < y < x^2\} \\ \overline{A} &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -2 \leq y \leq x^2\} \\ \partial A &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = -2 \text{ ou } y = x^2\} \end{aligned}}$$

7) a. $\boxed{\mathring{A} = \emptyset.}$ En effet, soit $x \in A$, de la forme $\frac{1}{2^n}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.

Alors $\forall r > 0$, $B(x,r) \not\subset A$, puisqu'elle contient (par exemple) $x + \min\left(\frac{r}{2}, \frac{1}{2^{n+1}}\right)$, qui



n'appartient pas à A (car compris strictement entre $\frac{1}{2^n}$ et $\frac{1}{2^{n-1}}$)

Donc x n'est pas intérieur à A. Donc A n'a pas de point intérieur.

b. $0 \in \overline{A}$ car la suite $\left(\frac{1}{2^n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$, à valeurs dans A, CV vers 0.

Montrons que $\boxed{\overline{A} = A \cup \{0\}}$. Pour cela il faut justifier que toute suite à valeurs dans A qui CV dans $\mathbb{R}$ CV soit vers un élément de A, soit vers 0.

Si elle ne converge pas vers 0, comme elle est positive (strict) et convergente, elle est minorée par un $\varepsilon > 0$. Mais alors, comme elle est à valeurs dans A, elle est à valeurs dans $A \cap]\varepsilon, +\infty[$, qui est un ensemble fini. Or une suite à valeurs dans un ss-ens. fini de $\mathbb{R}$ qui converge est forcément constante à partir d'un certain rang. Donc sa limite est un élément de A. Ce qui conclut.

c. $\boxed{\partial A} = \overline{A} \setminus \mathring{A} = \overline{A} \setminus \emptyset = \boxed{\overline{A}}$

8. a) On montre comme précédemment que $\boxed{\mathring{A} = \emptyset.}$

b) On a déjà vu que A était fermé donc $\boxed{\overline{A} = A}$

c) Donc $\boxed{\partial A = A}$

9. a) Tout réel est limite de suite de rationnels donc $\boxed{\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}}$.

b) $\forall x \in \mathbb{Q}$, $\forall r > 0$, $B(x,r) =]x-r, x+r[\not\subset \mathbb{Q}$ car $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est lui aussi dense dans $\mathbb{R}$, donc $\boxed{\mathring{\mathbb{Q}} = \emptyset}$

c) Ainsi $\boxed{\partial \mathbb{Q} = \overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}}$