MAT303

Premier Semestre — 2018-2019

Deuxième Contrôle Continu

1	
2	
3	
4	
5	

1. Déterminer si

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$$

existe.

Solution. On affirme que cette limite n'existe pas. En effet, si l'on se restreint à la droite $y=0$ (qui inclut $(0,0)$), la limite précédente devient

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 0^2}{x^2 0^2+(x-0)^2} = 0.$$

Par ailleurs, si l'on restreint la limite de l'énoncé à la droite $x=y$ (qui inclut l'origine du plan) on trouve

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 x^2}{x^2 x^2+(x-x)^2} = 1.$$

Comme ces deux limites partielles sont différentes, la limite double n'existe pas.

2. On considère l'expression suivante

$$f(x,y) = xy \sin\left(\frac{1}{x}\right) \sin\left(\frac{1}{y}\right).$$

(a) Déterminer le domaine de définition $\mathrm{Dom}(f) \subseteq \mathbb{R}^2$ de f. La fonction f est-elle continue sur $\mathrm{Dom}(f)$?

(b) Pour tout point $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2 \setminus \mathrm{Dom}(f)$, calculer la limite

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y).$$

Est-ce qu'il existe une extension continue de f sur $\mathbb{R}^2$?

Solution.

(a) C'est clair que l'expression donnée n'a pas de sens si et seulement si $x=0$ ou $y=0$, puisque l'on ne peut pas diviser par zéro. Cela nous dit que $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) : xy = 0\}$.

(*b*) On considère la fonction $g : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ donnée par $g(t) = t \sin(1/t)$, pour tout $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. C'est clair que g est une fonction continue (sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$) puisqu'elle s'obtient à partir d'autres fonctions continues en employant les opérations produit, composition et division avec dénominateur non nul. En plus, on sait que

$$\lim_{t\to 0} g(t) = 0,$$

puisque la limite d'un produit d'une fonction bornée par une fonction avec limite nulle est nulle. On considère la seule extension continue $\bar{g} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de g, *i.e.* $\bar{g}(t) = g(t)$ si $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ et $\bar{g}(0) = 0$.

Soit $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2 \setminus \mathrm{Dom}(f)$, *i.e.* $x_0 y_0 = 0$. On remarque que

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = \lim_{x\to x_0} g(x) \lim_{y\to y_0} g(y) = \bar{g}(x_0)\bar{g}(y_0).$$

La fonction $\bar{f}(x,y) = \bar{g}(x)\bar{g}(y)$ est définie sur $\mathbb{R}^2$, est continue et elle étend f.

3. On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{|x|y}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

(*a*) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

(*b*) Montrer que la dérivée directionnelle $\partial f / \partial \bar{v}(0,0)$ existe, pour tout $\bar{v} = (v_x, v_y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $v_x^2 + v_y^2 = 1$, et calculer sa valeur.

(*c*) Montrer que f n'est pas différentiable en $(0,0)$.

Solution.

(*a*) Comme $f|_{\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}}$ s'obtient d'appliquer sommes, produits, compositions et divisions avec dénominateur non nul des fonctions continues, on voit que f est continue en tout point $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Alors f est continue sur $\mathbb{R}^2$ si et seulement si elle est continue en $(0,0)$. Pour cela, il suffit de montrer que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|x||y|}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0. \tag{1}$$

Comme $|x| \le \sqrt{x^2+y^2}$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on voit que

$$0 \le \frac{|x||y|}{\sqrt{x^2+y^2}} \le |y| \tag{2}$$

pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. C'est clair que les limites du minorant et du majorant dans (2) valent 0 quand $(x,y) \to (0,0)$. Par le théorème d'encadrement, la limite au milieu est zéro aussi, *i.e.* (1) est satisfaite.

(*b*) On calcule

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{v}}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(tv_x, tv_y) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{|tv_x| tv_y}{t\sqrt{(tv_x)^2 + (tv_y)^2}}$$
$$= \lim_{t\to 0} \frac{t|t|.|v_x|v_y}{t|t|\sqrt{v_x^2 + v_y^2}} = \frac{|v_x|v_y}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2}} = |v_x|v_y.$$

(*c*) Comme les derivées partielles sont un cas particulier des dérivées directionnelles on trouve que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial (1,0)}(0,0) = 0 = \frac{\partial f}{\partial (0,1)}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0).$$

Si f était différentiable en $(0,0)$, alors, pour $\bar{v} = (1,1)/\sqrt{2}$,

$$\frac{1}{2} = \left|\frac{1}{\sqrt{2}}\right| \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\partial f}{\partial \bar{v}}(0,0) = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) + \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0,$$

ce qui est absurde. Cela implique que f n'est pas différentiable en $(0,0)$.

4. Soient $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}$ deux fonctions différentiables. On considère la fonction $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $F(x,y) = (f(x)^{g(y)}, g(y)^{f(x)})$. Calculer la matrice jacobienne de F en tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ en termes des dérivées de f et de g.

Solution. La matrice jacobienne est

$$J_F(x,y) = \begin{pmatrix} f'(x)g(y)f(x)^{g(y)-1} & \ln(f(x))g'(y)f(x)^{g(y)} \\ \ln(g(y))f'(x)g(y)^{f(x)} & f(x)g'(y)g(y)^{f(x)-1} \end{pmatrix}.$$

5. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x,y) = e^{x-y}(x^2 - 2y^2)$.

(*a*) Calculer les points critiques de f.

(*b*) Pour tout point critique, déterminer s'il s'agit d'un maximum local, d'un minimum local ou d'un point-selle.

(*c*) La fonction f admet-t-elle un extremum global ?

Solution.

(*a*) C'est clair que la fonction est de classe C^3, puisqu'elle s'obtient à partir de la somme, produit et composition de fonctions de classe C^3. Les dérivées partielles de f sont

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = e^{x-y}(x^2 + 2x - 2y^2) \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -e^{x-y}(x^2 + 4y - 2y^2).$$

Cela implique que les points critiques de f sont les solutions du système

$$x^2 + 2x - 2y^2 = 0 = x^2 + 4y - 2y^2.$$

En particulier, cela implique $x = 2y$. Si l'on inclut cette condition dans la dernière équation on trouve $y(y+2) = 0$. Les points critiques de f sont alors $(0,0)$ et $(-4,-2)$.

(*b*) La matrice hessienne de f est

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} e^{x-y}(x^2+4x-2y^2+2) & -e^{x-y}(x^2+2x-2y^2+4y) \\ -e^{x-y}(x^2+2x-2y^2+4y) & e^{x-y}(x^2+8y-2y^2-4) \end{pmatrix}.$$

En particulier,

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad H_f(-4,-2) = e^{-2}\begin{pmatrix} -6 & 8 \\ 8 & -12 \end{pmatrix}.$$

Les déterminants respectifs sont -8 et $8e^{-4}$. Cela implique que $(0,0)$ est un point-selle. Par rapport à $(-4,-2)$, comme le coefficient dans la première ligne et première colonne de la matrice hessienne est $-6e^{-2} < 0$, $(-4,-2)$ est un maximum local strict.

(*c*) Comme

$$\lim_{\substack{x \to +\infty \\ y=0}} f(x,y) = \lim_{x\to+\infty} x^2e^x = +\infty \text{ et } \lim_{\substack{y \to -\infty \\ x=0}} f(x,y) = \lim_{y\to-\infty} (-2)y^2e^{-y} = -\infty,$$

on voit que f n'admet pas d'extrema globaux.