Corrigé du partiel
du lundi 9 novembre 2020

Exercice 1. Autour du cours

1. Par hypothèse, pour tout $n \geq 0$, $u_{n+1} \leq a u_n$. Ceci montre (par récurrence) que pour tout $n \geq 0$, $u_n \leq a^n u_0$. Or la série $\big(\sum_{n\geq 0} a^n u_0\big) = u_0\big(\sum_{n\geq 0} a^n\big)$ converge (série géométrique de raison $a \in]0,1[$). Par critère de comparaison des séries à termes positifs, cela montre que la série $\big(\sum_{n\geq 0} u_n\big)$ converge.

Remarque : ce résultat fait partie de la preuve du critère de d'Alembert. Dans cette question de cours, le critère de comparaison utilisé n'est pas à démontrer (il est antérieur dans le cours, sa preuve : la suite $\big(\sum_{n\geq 0} u_n\big)$ est croissante et majorée).

2. Les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\frac{1}{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}})_{n\in\mathbb{N}}$ conviennent : la série $\big(\sum_{n\geq 0} u_n\big)$ est une série de Riemann divergente, la série $\big(\sum_{n\geq 0} v_n\big)$ est une série alternée convergente et la majoration $|u_n| \leq |v_n|$ résulte du fait que $\sqrt{n} \leq n$ pour tout entier n.

Remarque : dans l'exemple ci-dessus, on a $|u_n| = o(|v_n|)$. L'exemple $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\frac{1}{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\frac{(-1)^n}{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ répond encore plus simplement à la question.

Exercice 2.

On utilisera sans le signaler le résultat du cours suivant : pour toute suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ et pour tout $n_1, n_2 \geq n_0$, les séries $\big(\sum_{n\geq n_1} u_n\big)$ et $\big(\sum_{n\geq n_2} u_n\big)$ sont de même nature.

1. Pour tout $n \geq 1$, on a $0 \leq \big|\dfrac{\cos(n)}{n^2}\big| \leq \dfrac{1}{n^2}$.

La série $\big(\sum_{n\geq 1} \dfrac{1}{n^2}\big)$ est une série de Riemann convergente. Cela montre, par critère de comparaison de séries à termes positifs, que la série $\big(\sum_{n\geq 1} \dfrac{\cos(n)}{n^2}\big)$ est absolument convergente, donc convergente.

2. Pour tout $n \geq 2$, on a $2 - \frac{1}{n} \geq \frac{3}{2}$, donc $0 \leq \dfrac{1}{n^{2-\frac{1}{n}}} \leq \dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$. Or la série $\big(\sum_{n\geq 2} \dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\big)$ est une série de Riemann convergente. Cela montre, par critère de comparaison des séries à termes positifs, que la série $\big(\sum_{n\geq 1} \dfrac{1}{n^{2-\frac{1}{n}}}\big)$ est convergente, et donc absolument convergente puisqu'à termes positifs.

Remarque : on peut également constater que $\dfrac{1}{n^{2-\frac{1}{n}}} \sim \dfrac{1}{n^2}$ mais il faut le démontrer. Cela vient du fait que $n^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n}\ln n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

3. Pour tout $N \geq 1$, la somme partielle $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} \Big(\sin\big(\frac{1}{n}\big) - \sin\big(\frac{1}{n+1}\big)\Big)$ est "télescopique" :

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N}\Big(\sin\big(\frac{1}{n}\big)-\sin\big(\frac{1}{n+1}\big)\Big) &= \sum_{n=1}^{N}\sin\big(\frac{1}{n}\big)-\sum_{n=1}^{N}\sin\big(\frac{1}{n+1}\big)\\ &= \Big(\sin(1)+\sin\big(\frac{1}{2}\big)+\cdots+\sin\big(\frac{1}{n}\big)\Big)-\Big(\sin\big(\frac{1}{2}\big)+\cdots+\sin\big(\frac{1}{n}\big)+\sin\big(\frac{1}{n+1}\big)\Big)\\ &= \sin(1)-\sin\big(\frac{1}{n+1}\big).\end{aligned}$$

Cela montre que la série converge (et que sa somme vaut $\sin(1)$).

Pour l'absolue convergence, on constate que pour tout $n \geq 1$, $\frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n} \leq \frac{\pi}{2}$. Comme la fonction sinus est croissante sur l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}]$, cela montre que la série $\big(\sum_{n\geq 1} u_n\big)$ est à termes positifs. Elle est donc absolument convergente.

Autre preuve : on peut utiliser un développement limité pour montrer la convergence de la série. On peut dire par exemple :

$\sin\big(\frac{1}{n}\big) = \frac{1}{n} + o\big(\frac{1}{n^2}\big)$, $\sin\big(\frac{1}{n+1}\big) = \frac{1}{n+1} + o\big(\frac{1}{(n+1)^2}\big)$. *Donc, comme* $\frac{1}{n} \sim \frac{1}{n+1}$ *:*

$$\sin\big(\frac{1}{n}\big)-\sin\big(\frac{1}{n+1}\big) = \frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}+o\big(\frac{1}{n^2}\big) = \frac{1}{n(n+1)}+o\big(\frac{1}{n^2}\big) = \frac{1}{n^2}+o\big(\frac{1}{n^2}\big).$$

[L'équivalence $\frac{1}{n(n+1)} \sim \frac{1}{n^2}$ *et la définition de o justifie la dernière égalité.]*

Cela montre que $u_n \sim \frac{1}{n^2}$*. Donc* u_n *est positive à partir d'un certain rang et comme la série* $\big(\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}\big)$ *est une série de Riemann convergente, par critère de comparaison des séries à termes positifs, la série* $\big(\sum_{n\geq 1} u_n\big)$ *est convergente (et absolument convergente).*

4. Pour tout entier n pair, on a $u_n = \left(1+\frac{1}{2}\right)^n \geq 1$. La suite $(u_n)_{n\geq 1}$ ne tend donc pas vers 0. La série $\big(\sum_{n\geq 1} u_n\big)$ diverge.

5. Comme $\frac{1}{2n+1}$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini, le développement limité de la fonction ln en 1 donne :

$$\ln\big(1+\frac{(-1)^n}{2n+1}\big) = \frac{(-1)^n}{2n+1} - \frac{1}{2(2n+1)^2} + o\big(\frac{1}{(2n+1)^2}\big).$$

Or :

- la série $\big(\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{2n+1}\big)$ est une série convergente par le critère spécial des séries alternées,
- la série $\Big(\sum_{n\geq 1}\big(-\frac{1}{2(2n+1)^2}+o\big(\frac{1}{(2n+1)^2}\big)\big)\Big)$ est convergente car son terme général est équivalent à $-\frac{1}{8n^2}$, donc négatif à partir d'un certain rang, et $\frac{1}{n^2}$ est le terme général d'une série de Riemann convergente.

Cela montre que la série $\big(\sum_{n\geq 1} u_n\big)$, somme de deux séries convergentes, est convergente.

On a vu que $u_n \sim \frac{(-1)^n}{2n+1}$, donc $|u_n| \sim \frac{1}{2n+1}$ qui est le terme général d'une série divergente $(0 \leq \frac{1}{2n+1} \sim \frac{1}{2n}$ et $\big(\sum_{n\geq 1}\frac{1}{2n}\big) = \frac{1}{2}\big(\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}\big)$ diverge). La série $\big(\sum_{n\geq 1} u_n\big)$ est donc semi-convergente.

Remarque : il est inutile de faire un développement limité en $\frac{1}{n}$ *de* $\frac{1}{2n+1}$ *dans cette preuve puisque la quantité* $\frac{1}{2n+1}$ *tend vers 0 quand* n *tend vers l'infini.*

6. Montrons par le critère spécial des séries alternées que la série $\big(\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n\sqrt{n}}{n+1}\big)$ est convergente.

— Le signe de la suite $\big(\frac{(-1)^n\sqrt{n}}{n+1}\big)$ est alterné.

— On a $\frac{\sqrt{n}}{n+1} \sim \frac{1}{\sqrt{n}}$ donc la suite tend vers 0.

— Considérons la fonction $f : x \mapsto \frac{\sqrt{x}}{x+1}$ définie sur $\mathbb{R}_+$. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}(x+1)} - \frac{\sqrt{x}}{(x+1)^2} = \frac{1-x}{2\sqrt{x}(x+1)^2}$. Donc f est décroissante sur l'intervalle $[1, +\infty[$, ce qui montre que la suite $\big(\frac{\sqrt{n}}{n+1}\big)_{n\geq 1}$ est décroissante.

Cela montre que la série $\big(\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n\sqrt{n}}{n+1}\big)$ satisfait le critère spécial des séries alternées, donc converge.

Comme $\frac{\sqrt{n}}{n+1} \sim \frac{1}{\sqrt{n}}$ et $\big(\sum \frac{1}{\sqrt{n}}\big)$ est une série de Riemann divergente, la série $\big(\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n\sqrt{n}}{n+1}\big)$ n'est pas absolument convergente.

Remarque : On peut aussi montrer la convergence de la série en faisant un développement asymptotique de $\frac{(-1)^n\sqrt{n}}{n+1}$ *dans l'échelle des puissances de* $\frac{1}{\sqrt{n}}$ *:*

$$\frac{(-1)^n\sqrt{n}}{n+1} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\frac{1}{1+\frac{1}{n}} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\Big(1 - \frac{1}{n} + o\big(\frac{1}{n}\big)\Big) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n\sqrt{n}} + o\big(\frac{1}{n\sqrt{n}}\big),$$

le premier terme étant le terme général d'une série convergente (critère spécial des séries alternées), les deux suivants étant les termes généraux de séries absolument convergentes.

Exercice 3.

1. Pour tout $n \geq 1$, on a $u_n = \ln\Big(\frac{2n+1}{2n-1}\Big) = \ln\Big(1 + \frac{2}{2n-1}\Big) \geq 0$.
Comme $\frac{2}{2n-1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x$, on obtient $u_n \sim \frac{2}{2n-1} = \frac{1}{n}$.
Comme la série $\big(\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}\big)$ est une série de Riemann divergente, par critère de comparaison des séries à termes positifs, la série $\big(\sum_{n\geq 1} u_n\big)$ diverge.

2. Soit $N \geq 1$. On a :

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N} u_n &= \sum_{n=1}^{N} \big(\ln(2n+1) - \ln(2n-1)\big)\big) \\ &= \sum_{n=1}^{N} \ln(2n+1) - \sum_{n=1}^{N} \ln(2n-1) \\ &= \big(\ln(3) + \cdots + \ln(2N+1)\big) - \big(\ln(1) + \cdots + \ln(2N-1)\big) \\ &= \ln(2N+1).\end{aligned}$$

Comme $\ln(2N+1) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, on retrouve que la série $\big(\sum_{n\geq 1} u_n\big)$ diverge.