TD MAT 302

Exo 1

1. $u_n = \frac{1}{2n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

2. $u_n = \frac{n+2}{2n+3} = \frac{\cancel{n}}{2\cancel{n}} \times \frac{1+\frac{2}{n}}{1+\frac{3}{2n}} \longrightarrow \frac{1}{2}$

3. $u_n = \frac{n^2}{n+1} = \frac{n^2}{n} \times \frac{1}{1+\frac{1}{n}} \longrightarrow +\infty$

4. $u_n = \frac{10n^2+1}{n^3-1} = \frac{10}{n} \times \frac{\overbrace{1+\frac{1}{10n^2}}^{\to 1}}{\underbrace{1-\frac{1}{n^3}}_{\to 1}} \longrightarrow 0$

5. $u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\underbrace{n+1-n}_{=1}} \longrightarrow +\infty$

(6. $u_n = \frac{(n+1)^2}{(n+1)^3-n^3} = \frac{n^2+2n+1}{3n^2+3n+1} \longrightarrow \frac{1}{3}$)

7. $u_n = \frac{n^{10}}{1{,}01^n} \longrightarrow 0$ car $n^p = o(a^n)$ $\forall a>1$ $\forall p \in \mathbb{N}$

vérif : $\ln(u_n) = 10\ln(n) - n\underbrace{\ln(1{,}01)}_{>0}$

$= -n\Big(\underbrace{-\frac{10\ln(n)}{n}}_{\to 0 \text{ croissances comparées}} + \ln(1{,}01)\Big) \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$

Exo 2

1. $u_n = \frac{1}{2^n}$, $v_n = \frac{1}{3^n}$ $\longrightarrow$ $v_n \underset{n\to+\infty}{=} o(u_n)$ $\left(\frac{v_n}{u_n} = \left(\frac{2}{3}\right)^n \to 0\right)$

et donc O aussi, et rien d'autre

2. $u_n = \frac{1}{n}$, $v_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ $\longrightarrow$ $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$ (et O) $\left(\frac{u_n}{v_n} = \frac{1}{\sqrt{n}} \to 0\right)$

3. $u_n = n^2$, $v_n = 2^n$ $\longrightarrow$ $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$ (et O) (croissances comparées)

4. $u_n = \cos\left(\frac{1}{n}\right) \longrightarrow \cos(0) = 1$
$v_n = e^{1/n} \longrightarrow e^0 = 1$
donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ (de $u_n = O(v_n)$ et $v_n = O(u_n)$)

5. $u_n = \cos(n)$, $v_n = 1$ $\quad |u_n| \leq v_n$ donc $u_n = O(v_n)$

$\frac{u_n}{v_n} \not\to 1$, $\not\to 0$ $\quad \frac{v_n}{u_n}$ n'est pas bornée (difficile) donc c'est la seule comparaison

6. $u_n = \log(n)$, $v_n = \sqrt{n}$ croissances comparées : $u_n = o(v_n)$
(et de O)

7. $u_n = \sin\left(\frac{1}{n}\right)$, $v_n = \frac{1}{n}$ $\qquad \frac{u_n}{v_n} \to 1 \qquad \left(\frac{\sin(x)}{x} = \frac{\sin(x) - \sin(0)}{x} \xrightarrow[x \to 0]{} \sin'(0) = \cos(0) = 1 \right)$

donc $u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} v_n$ (de $u_n = O(v_n)$ et $v_n = O(u_n)$)

Exo 3

1. $\frac{n}{e^n} \qquad 2^{-n} \qquad e^{-\frac{n}{2}} \qquad \frac{1}{n^2} \qquad \frac{1}{n\sqrt{n}} \qquad \frac{1}{n\ln(n)} \qquad \frac{\ln(n)^2}{n}$

- $\dfrac{\frac{n}{e^n}}{2^{-n}} = n \times \left(\frac{2}{e}\right)^n \longrightarrow 0$ (croissances comparées)

- $\dfrac{2^{-n}}{e^{-\frac{n}{2}}} = \left(\underbrace{\frac{\sqrt{e}}{2}}_{|\cdot|<1}\right)^n \longrightarrow 0$ (suites géom)

- $\dfrac{e^{-\frac{n}{2}}}{1/n^2} = \dfrac{n^2}{(\sqrt{e})^n} \longrightarrow 0$ (croissances comparées)

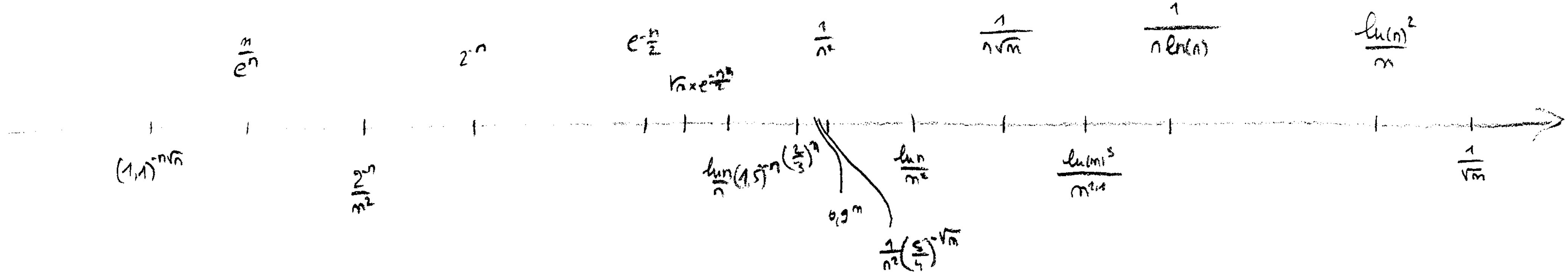
- $\dfrac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n\sqrt{n}}} = \dfrac{1}{\sqrt{n}} \longrightarrow 0$

- $\dfrac{1/n\sqrt{n}}{1/n\ln(n)} = \dfrac{\ln(n)}{\sqrt{n}} \longrightarrow 0$ (croissances comparées)

- $\dfrac{1/n\ln n}{\ln(n)^2/n} = \dfrac{1}{\ln(n)^3} \longrightarrow 0$

2.

TD1 . ③



$\frac{n}{e^n}$
2^{-n}
$e^{-\frac{n}{2}}$
$\sqrt{n}\times e^{-\frac{n^2}{2}}$
$\frac{1}{n^2}$
$\frac{1}{n\sqrt{n}}$
$\frac{1}{n\ln(n)}$
$\frac{\ln(n)^2}{n}$
$(1{,}1)^{-n\sqrt{n}}$
$\frac{2^{-n}}{n^2}$
$\frac{\ln n}{n}(1{,}5)^{-n}\left(\frac{2}{3}\right)^n$
$0{,}9^n$
$\frac{1}{n^2}\left(\frac{5}{4}\right)^{-\sqrt{n}}$
$\frac{\ln n}{n^2}$
$\frac{\ln(n)^5}{n^{1,1}}$
$\frac{1}{\sqrt{n}}$

A faire...

Exo 4

1. $u_n = \dfrac{1}{2n+1} = \dfrac{1}{2n(1+\frac{1}{2n})} = \dfrac{1}{2n} \times \left(1 - \dfrac{1}{2n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)$

$$= \frac{1}{2n} - \frac{1}{4n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

2. $u_n = \dfrac{n+1}{3+2n} = \dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\left(\dfrac{1}{1+\frac{3}{2n}}\right) = \dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\left(1 - \dfrac{3}{2n} + \underbrace{\dfrac{9}{4n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)}_{\varepsilon_n \times \frac{1}{n^2} \text{ avec } \varepsilon_n \to 0}\right)$

$$= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{n} - \frac{3}{2n} - \frac{3}{2n^2} + \frac{9}{4n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{4n} + \frac{3}{8n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

3. $u_n = \dfrac{\log\left(1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right)}{\sqrt{1-\frac{1}{n}}} = \left(-\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n^2} - \left(-\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}\right)^2 + o\left(\left(-\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}\right)^2\right)\right) \times \underbrace{\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^{-\frac{1}{2}}}_{\left(1 + \frac{1}{2n} - \frac{3}{8n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)}$

$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + o(x^2)$

or $\left(-\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}\right)^2 \underset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^2}$ donc $o\left(\left(-\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}\right)^2\right) = o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ donc après calcul :

$$u_n = \left(-\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\left(1 + \frac{1}{2n} - \frac{3}{8n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$$

$$= -\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

(on ne garde que les termes en $\frac{1}{n}$ et $\frac{1}{n^2}$, tout le reste est un $o\left(\frac{1}{n^2}\right)$)

4. $u_n = \dfrac{1 - \frac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{n}+2} = \left(1 - \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right) \times \dfrac{1}{\sqrt{n}}\left(\dfrac{1}{1+\frac{2}{\sqrt{n}}}\right)$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{\sqrt{n}} + \frac{4}{n} - \frac{8}{n\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{2}{n} - \frac{1}{n} + \frac{4}{n\sqrt{n}} + \frac{2}{n\sqrt{n}} - \frac{8}{n^2} - \frac{4}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{3}{n} + \frac{6}{n\sqrt{n}} - \frac{12}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

5. $u_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+2}$ Astuce / méthode :

$$\ln u_n = (n+2)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = (n+2)\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{2n} + \frac{2}{n} + \frac{1}{3n^2} - \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$= 1 + \frac{3}{2n} - \frac{2}{3n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$u_n = \exp\Big(1 + \underbrace{\frac{3}{2n} - \frac{2}{3n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)}_{w_n}\Big)$$

$$= e \times \left(w_n + \frac{w_n^2}{2} + o(w_n^2)\right) = \quad \text{or } w_n^2 \sim \left(\frac{3}{2n}\right)^2 \text{ donc } o(w_n^2) = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$u_n = e \times \left(\left(1+\frac{3}{2n} - \frac{2}{3n^2}\right) + \left(1 + \frac{3}{2n} - \frac{2}{3n^2}\right)^2 + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$$

$$= e \times \left(1 + \frac{3}{2n} - \frac{2}{3n^2} + 1 + \frac{3}{n} - \frac{4}{3n^2} + \frac{9}{4n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$$

$$= 2e + \frac{9e}{2n} + \frac{3e}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Exos. 1. $1 + \frac{1}{n} \longrightarrow 1$

2. $(-1)^n$

3. $u_n = \begin{cases} n & \text{si } n \text{ pair} \\ 0 & \text{si } n \text{ impair} \end{cases}$

4. $\frac{(-1)^n}{n}$

5. $(-1)^n$ et $(-1)^n$

Exo 6 Hypothèse $\forall \varepsilon > 0, \exists N_u, \forall n \geq N_u \quad |u_n - l| < \varepsilon$

$\forall \varepsilon > 0, \exists N_v, \forall n \geq N_v \quad |v_n - l'| < \varepsilon$

But $\forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall n \geq N \quad |u_n v_n - ll'| < \varepsilon$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n v_n - ll'| = |u_n v_n - u_n l' + u_n l' - ll'|$$

$$\leq |u_n||v_n - l'| + |l'||u_n - l|$$

La suite (u_n) converge donc est bornée : $\exists C \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq C$

ε ... $\frac{\varepsilon}{2C}>0$ donc il existe $N_2\in\mathbb{N}$ tq $\forall n\geq N_2$, $|v_n-l'|\leq\frac{\varepsilon}{2C}$

$\frac{\varepsilon}{2|l'|+1}>0$ donc $\exists N_3\in\mathbb{N}$, $\forall n\geq N_3$ $|u_n-l|\leq\frac{\varepsilon}{2|l|+1}$

Alors $\forall n\geq \underbrace{\max(N_2,N_3)}_{:=N}$, $|u_nv_n-ll'|\leq C\cdot\frac{\varepsilon}{2C}+|l'|\times\frac{\varepsilon}{2|l'|+1}\leq\varepsilon$

On a donc bien montré la cv vers ll' de (u_nv_n). $\square$

Exo 7 1. Soit l la limite commune. On a : $\forall\varepsilon>0$, $\exists N_u\in\mathbb{N}$, $\forall n\geq N_u$, $|u_{2n}-l|\leq\varepsilon$

$\exists N_v\in\mathbb{N}$, $\forall n\geq N_v$ $|u_{2n+1}-l|\leq\varepsilon$

Soit $\varepsilon>0$. Posons $N=\max(2N_u,2N_v+1)$ Alors

$\forall n\geq N$ si n est pair, $n=2m$ avec $m\geq N_u$ donc $|u_n-l|\leq\varepsilon$

si n est impair, $n=2m+1$ avec $m\geq N_v$ donc $|u_n-l|\leq\varepsilon$

On a bien montré que (u_n) cv vers l

2. - Commençons par montrer que la limite de (u_{2n}) et (u_{2n+1}) est nécessairement la même, et on sera ramené à la question précédente.

(u_{6n}) est extraite à la fois de (u_{2n}) et (u_{3n}) donc sa limite est égale à celles de (u_{2n}) et (u_{3n}) qui sont donc égales.

De même, $(u_{2(3n+1)+1})$ est une sous suite de (u_{3n}) et (u_{2n+1}) donc elle cv vers la même limite

$$u_{2(3n+1)+1} = u_{6n+3} = u_{3(2n+1)}$$

CQFD. $\square$

Exo 8 1. $u_n = n^4\left(\ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)+\frac{1}{n^2}\right)$ on a a priori une forme indéterminée. On va devoir faire un DL du 2e facteur

$$\ln(1-x) = -x-\frac{x^2}{2}-o(x^2)$$

$$\ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right) = -\frac{1}{n^2}-\frac{1}{2n^4}+o\left(\frac{1}{n^4}\right)$$

$$\text{Ainsi } u_n = n^4\left(-\frac{1}{2n^4}+o\left(\frac{1}{n^4}\right)\right) = -\frac{1}{2}+o(1)\xrightarrow[n\to+\infty]{}-\frac{1}{2}$$

2. $u_n = n(e^{\frac{2}{n}} - 1)$ forme indéterminée encore, donc DL

$$e^{\frac{2}{n}} = 1 + \frac{2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

$\hookrightarrow u_n = n\left(\frac{2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = 2 + o(1) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 2$

3. $u_n = \dfrac{n \times n-1 \times \dots \times 1}{n \times n \times \dots \times n} = \underbrace{\frac{n}{n} \times \frac{n-1}{n} \times \dots}_{\leq 1} \times \frac{1}{n}$

Donc $0 \leq u_n \leq \frac{1}{n}$

Donc par le thm des gendarmes $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

4. $u_n = \tan\left(\frac{1}{n}\right)\cos(2n+1) \rightarrow |u_n| \leq \left|\tan\frac{1}{n}\right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc (u_n) aussi

5. $u_n = \dfrac{\sqrt{n-3} + i\ln(2n)}{\ln(n)}$ $\quad Re(u_n) \longrightarrow +\infty$ par croissance comparée

Donc (u_n) diverge

6. $u_n = \dfrac{\ln(n^2+3n-2)}{\ln(n^{1/3})} = \dfrac{\ln\left(n^2\left(1+\frac{3}{n}-\frac{2}{n^2}\right)\right)}{\frac{1}{3}\ln n} = \dfrac{2\ln(n) + \overbrace{\ln\left(1+\frac{3}{n}-\frac{2}{n^2}\right)}^{\longrightarrow 0}}{\frac{1}{3}\ln(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 6$

Exo 9 1. (a) $u_n \nearrow$ $\left(u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)^2} > 0\right)$

$$v_{n+1} - v_n = u_{n+1} - u_n + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{n}{n(n+1)} - \frac{n+1}{n(n+1)}$$

$$= \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{n(n+1)} < 0$$

et $u_n - v_n = \frac{1}{n} \longrightarrow 0$

(b) $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)^3} > 0$ donc $u_n \nearrow$

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{(n+1)^3} + \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{n^2} = \frac{1}{(n+1)^3} + \frac{n^2}{(n+1)^2 n^2} - \frac{(n+1)^2}{(n+1)^2 n^2}$$

$$= \frac{1}{(n+1)^3} \cancel{+} \frac{-2n-1}{(n+1)^2 n^2}$$

$$= \frac{1}{(n+1)^3} - \frac{2}{(n+1)^2 n} - \frac{1}{\dots} < 0$$

et $u_n - v_n = \frac{1}{n^2} \to 0$

Notons que par déf, u_n et $v_n \geq 0$ $\forall n$

(c) $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} - v_n = \frac{u_n - v_n}{2} \leq 0$ d'après ce qui suit

$$v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} - \sqrt{u_n v_n} = \frac{(\sqrt{u_n})^2 - 2\sqrt{u_n v_n} + (\sqrt{v_n})^2}{2} \geq 0$$

$= (\sqrt{u_n} - \sqrt{v_n})^2$

$u_{n+1} - u_n = \sqrt{u_n v_n} - u_n = \sqrt{u_n}\,(\sqrt{v_n} - \sqrt{u_n}) \geq 0$ puisqu'on vient de voir que $v_n \geq u_n$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$

et vrai pour $n=0$

donc (u_n) et (v_n) ont une limite. Est-ce la même ? Posons $l = \lim u_n$, $l' = \lim v_n$

$$l' = \lim v_n = \lim v_{n+1} = \frac{\lim u_n + \lim v_n}{2} = \frac{l + l'}{2} \text{ donc } l = l'$$

donc $v_n - u_n \to 0$.

2.(a) $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)!} > 0$ donc $(u_n) \nearrow$ strict.

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)!(n+1)} - \frac{1}{n!\,n}$$

$$= \frac{n(n+1)}{n(n+1)(n+1)!} + \frac{n}{(n+1)!\, n \times (n+1)} - \frac{(n+1)^2}{(n+1)!\, n \times (n+1)}$$

$$= \frac{n^2 + 2n - n^2 - 2n - 1}{\dots} < 0 \text{ donc } (v_n) \searrow \text{ strict.}$$

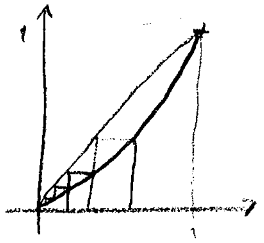
$v_n - u_n = \frac{1}{n!\,n} \to 0$ donc les suites sont adjacentes.

(b) Supposons que $e = \frac{p}{q}$. $\forall n \in \mathbb{N}$, $\underset{(\text{strict} \nearrow)}{u_n} < \frac{p}{q} < \underset{(\text{strict} \searrow)}{v_n}$

On peut choisir n (divisible par q) de sorte que $n!\frac{p}{q}$ soit entier N

on a alors $\underbrace{n!\,u_n}_{\text{entier}} < N < n!\,v_n = \underbrace{n!\,u_n}_{\text{entier}} + \frac{1}{n}$ impossible !

Exo 10



$\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0,1]$ (puisque $u_0 \in [0,1]$ et si $u_n \in [0,1]$, $\underset{u_{n+1}}{\underset{\shortparallel}{f(u_n)}} \in [0,1]$)

Elle est en particulier minorée.

Elle est en outre décroissante
- si $u_0 = 0$, elle est constante égale à 0 par une récurrence immédiate donc cv vers 0
- si $u_0 = 1$ ——— 1 ——— 1
- si $u_0 \in]0,1[$, elle est strict. $\searrow$ En effet montrons qu'alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0,1[$ et $u_{n+1} \leq u_n$:
  - vrai pour $n=0$
  - si vrai pour n alors $u_{n+1} \leq u_n < 1$ et donc $u_{n+2} = f(u_{n+1}) \leq u_{n+1}$

$\searrow$ et à valeurs dans $[0,1[$ $\Rightarrow$ limite l à valeurs dans $[0,1[$

or si $u_n \to l$, $u_{n+1} = f(u_n) \to l$

mais aussi $\to f(l)$ par continuité de f en l,

donc $f(l) = l$ donc nécessairement $l = 0$.

2. Voyons si la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{x}{2-\sqrt{x}}$ satisfait les hyp de la question précédente : $f(0)=0$, $f(1)=1$ OK

$$f(x) - x = \frac{x - 2x + x\sqrt{x}}{\underbrace{2-\sqrt{x}}_{>0}} = \frac{\overset{>0}{x}\overbrace{(-1+\sqrt{x})}^{<0 \text{ sur }]0,1[}}{\underbrace{2-\sqrt{x}}_{>0}} < 0$$

Donc on peut appliquer ce qui précède et $v_n \to 0$

Exo 11 Soit l la limite de (u_n).

$$S_n - l = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} l = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(u_k - l)$$

Soit $\varepsilon > 0$. $\exists N \in \mathbb{N}, \forall k \geq N, |u_k - l| < \varepsilon/2$

Soit $n \geq N$ alors $|S_n - l| \leq \dfrac{1}{n}\left(\underbrace{\sum_{k=1}^{N-1}|u_k - l|}_{C} + \sum_{k=N}^{n}\underbrace{|u_k - l|}_{<\frac{\varepsilon}{2}}\right)$

$$\leq \frac{C}{n} + \frac{\varepsilon}{2}$$

Donc pour $n \geq \max(N, \frac{\varepsilon}{2C})$, $|S_n - l| \leq 2 \cdot \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, ce qu'on voulait.

2. $u_n = (-1)^n$ convient (S_n vaut alternativement $\frac{-1}{n}$ et 0 de $\to 0$)

3. notons l la limite de $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$

Posons $v_n = \ln(u_n) - \ln(u_{n-1}) \longrightarrow \ln l \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$
$\uparrow$ si $\frac{u_{n+1}}{u_n} \to 0$

si $l \in \mathbb{R}$, $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} v_n \longrightarrow l$. Or $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} v_n = \frac{1}{n}(\ln(u_n) - \ln(u_0))$

$= \underbrace{\ln(u_n^{1/n})}_{\to \ln(l)} - \underbrace{\ln(\underbrace{u_0^{1/n}}_{\to 1})}_{\to 0}$

par la question précédente

CQFD

Reste à voir si la conclusion précédente reste vraie pour une suite tendant vers $-\infty$

Soit $A < 0$ $\exists N \in \mathbb{N}$, $\forall k \geq N$, $u_n \leq 2A$

soit $n \geq N$. Alors $S_n = \underbrace{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N-1}(u_k - l)}_{= \frac{C}{n} \leq -A} + \underbrace{\frac{1}{n}\sum_{k=N}^{n} \underbrace{u_k - l}_{\leq 2A}}_{\leq \frac{n-N+1}{n} 2A \leq 2A}$ $\leq A$ ✓

Exo 12 1) (i_n) est croissante et majorée donc CV
(S_n) est ↘ — minorée —

2) On construit par récurrence une telle sous suite $(u_{\varphi(k)})_{k \in \mathbb{N}}$
telle que $|u_{\varphi(k)} - \liminf u_n| \leq \frac{1}{k}$

Soit $k \in \mathbb{N}$ $\exists N \geq \varphi(k-1)$ tq $|\inf\{u_k, k \geq N\} - \liminf| < \frac{1}{2k}$
(qcq si $k=0$)

Par def de l'inf, $\exists k' \geq N \geq \varphi(k-1)$, $|u_{k'} - \inf\{u_k, k \geq n\}| < \frac{1}{2k}$

Alors $|u_{k'} - \liminf| < \frac{1}{k}$

On pose $\varphi(k) = k'$

Et on a bien la sous suite voulue. Idem pour lim sup.

3- Si (u_n) cv $\forall \varepsilon>0, \exists N, \forall n \geq N \quad l-\varepsilon \leq u_n \leq l+\varepsilon$

donc $\forall n \geq N, \forall k \geq n \quad l-\varepsilon \leq u_k \leq l+\varepsilon$

donc $\quad l-\varepsilon \leq \underbrace{\inf\{u_k, k \geq n\}}_{i_n} \leq \underbrace{\sup\{u_k, k \geq n\}}_{s_n} \leq l+\varepsilon$

Donc $\forall n \geq N \quad |i_n - l| \leq \varepsilon$ et $|s_n - l| \leq \varepsilon$

cela montre bien la cv demandée

Si (i_n) et (s_n) cv, $\exists N_1, N_2$ tq $\forall n \geq N_1 \quad |i_n - l| \leq \varepsilon$
vers la m limite $\quad \forall n \geq N_2 \quad |s_n - l| \leq \varepsilon$

Mais alors $\forall n \geq \max(N_1, N_2) \quad l-\varepsilon \leq i_n \leq u_n \leq s_n \leq l+\varepsilon$

donc $|u_n - l| \leq \varepsilon$ $\square$

4- Soit (u_n) une suite de Cauchy :

$\forall \varepsilon, \exists N \in \mathbb{N}, \forall p,q \geq N, |u_p - u_q| \leq \varepsilon$

Alors en particulier, $\forall p \geq N \quad |u_p| \leq |u_p - u_N| + |u_N| \leq \underbrace{\varepsilon + |u_N|}_{\text{indép}^t \text{ de } p}$

Donc $|u_p|$ est majorée par $\max(|u_0|, \dots, |u_{N-1}|, \varepsilon + |u_N|)$

Donc elle admet une lim sup et une lim inf. Reste à voir que celles-ci sont égales.

Or $\forall p,q \geq N \quad u_q - \varepsilon \leq u_p \leq u_q + \varepsilon$

donc $\underbrace{\sup\{u_q, q \geq p\} - \varepsilon}_{s_p - \varepsilon} \leq u_p \leq i_p + \varepsilon$

donc $0 \leq s_p - i_p \leq 2\varepsilon$

Donc $(s_p - i_p) \to 0$